1. BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Forcing und relative Konsistenzbeweise

Verfasserin

Julia Buchegger

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc.)

Wien, im Februar 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 033621
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuerin:	Vera Fischer, Ph.D., Privat Dozent

Abriss

Bei Forcing handelt es sich um eine Methode zur Konstruktion von Modellen, die Anwendung in relativen Konsistenzbeweisen findet. Das Ziel dieser Arbeit ist, eine Einführung in dieses Thema und seine Einsatzbereiche zu präsentieren. Zu Beginn wird die Idee von Forcing eingeführt und beschrieben, was man unter einer generischen Erweiterung versteht. Der Hauptteil der Arbeit befasst sich dann ausführlich mit den Beweisen des Wahrheits- und des Definierbarkeitslemmas. Im Anschluss daran werden Anwendungen der Forcing-Methode präsentiert. So wird zuerst gezeigt, dass die generische Erweiterung das Axiomensystem ZFC glaubt. Den Abschluss bildet dann ein Umriss des Beweises der Aussage, dass man mittels Forcing ein Modell konstruieren kann, das ZFC mit der Negation der Kontinuumshypothese glaubt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Die Kontinuumshypothese 1
1.2 Das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem 2

2 Generische Erweiterungen **4**
2.1 Generische Filter 4
2.2 P-Namen 5
2.3 Die Forcing-Relation 7

3 Das Wahrheits- und das Definierbarkeitslemma **8**
3.1 Eigenschaften der Forcing-Relation 9
3.2 Die Forcing*-Relation 11
3.2.1 Forcing* für atomare Sätze 11
3.2.2 Forcing* für alle Sätze 14

4 Anwendungen **16**
4.1 Die generische Erweiterung ist ein Modell von ZFC 16
4.2 Ein Modell von nicht CH 19

1 Einführung

1.1 Die Kontinuumshypothese

([1] S. 149-153) Die Kontinuumshypothese ist eine von Georg Cantor im Jahr 1878 aufgestellte Vermutung über die Mächtigkeit der reellen Zahlen. Diese besagt: Es gibt keine Menge, deren Mächtigkeit zwischen jener der natürlichen und der reellen Zahlen liegt. Anders formuliert ist die Potenzmenge der natürlichen Zahlen gleich groß wie jene der reellen Zahlen. Bezeichnet man mit $\aleph_0$ die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und mit $\aleph_1$ die darauf folgende Kardinalzahl, so lässt sich das Problem folgendermaßen beschreiben:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Die Frage, ob die Kontinuumshypothese wahr ist, hat Mathematikerinnen und Mathematiker fast ein Jahrhundert lang beschäftigt. Im Jahre 1900 stellte David Hilbert beim Internationalen Mathematikerkongress in Paris die berühmte Liste mit 23 bis zu diesem Zeitpunkt ungelösten Problemen vor. An deren erster Stelle stand die Kontinuumshypothese.
Der erste Teil zur Lösung stammt von Kurt Gödel. Sein Unvollständigkeitssatz besagt, dass hinreichend große Theorien (also insbesondere solche, die ZFC beinhalten) ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht selbst beweisen können. Aus diesem Grund muss man annehmen, dass es ein Modell für ZFC gibt, um größere Theorien zu beweisen. Die Sätze von Löwenheim-Skolem und Mostowski garantieren uns, dass wir so ein Modell auch als abzählbar und transitiv annehmen können. Daher werden wir im Rahmen dieser Arbeit den Begriff 'abzählbar transitives Modell' durch 'ctm' abkürzen. Gödel bewies 1938, dass es ein Modell für $ZFC + CH$ gibt. Damit hatte er gezeigt, dass ZFC und die Kontinuumshypothese relativ widerspruchfrei sind, oder anders formuliert, dass unter der Annahme, dass ZFC widerspruchsfrei ist, auch $ZFC + CH$ widerspruchsfrei ist. Paul Cohen zeigte in den Sechzigern, dass es auch ein Modell für $ZFC + \neg CH$ gibt, also ZFC zur Negation der Kontinuumshypothese relativ widerspruchsfrei ist. Dafür verwendete er die von ihm entwickelte Forcing-Methode und erhielt im Jahre 1966 die Fields-Medaille.
Mit Gödels und Cohens Werken konnte nun auch die Frage nach der Richtigkeit der Kontinuumshypothese beantwortet werden. Wir wissen nun, dass sie unabhängig von ZFC ist und im Rahmen der von uns als konventionell angesehenen Mathematik weder bewiesen noch widerlegt werden kann. Damit stellt die Kontinuumshypothese eine der bedeutendsten Anwendungen von Gödels Unvollständigkeitssatz dar.

1.2 Das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem

([3] S. 9-12 und [2] S. 16, 17) ZFC ist ein Axiomensystem, das weitestgehend als Grundlage der Mathematik anerkannt wird. Hierbei steht ZF für das 'Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem' und C für das Auswahlaxiom. Oft betrachten wir im Rahmen dieser Arbeit auch nur ZF, also ZFC ohne das Auswahlaxiom oder $ZF - P$, also ZF ohne das Potenzmengenaxiom. In der 1907 von Ernst Zermelo ersten veröffentlichten Version bestand ZFC aus sieben verbal ausformulierten Aussagen. 1921 fügte Abraham Fraenkel das Ersetzungsschema hinzu, um die Existenz von 'großen' Mengen wie $\{\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), ...\}$ zu beweisen. Im Jahre 1930 komplettierte Zermelo ZFC durch das Fundierungsaxiom. In dieser Ausgabe von ZFC war noch die Rede von Urelementen, also elementleeren Objekten. In späteren Formulierungen der Axiome von ZFC wurden diese Urelemente aber vermieden. Spricht man dennoch von der Mengenlehre mit Urelementen, so kennzeichnet man dies durch ein angehängtes U, also ZFU oder $ZFCU$.
Die Axiomatisierung von ZFC besteht aus unendlich vielen Axiomen, da das Aussonderungsschema und das Ersetzungsschema unendlich große Mengen von Axiomen sind. Die Sprache, die zur Formulierung der Axiome verwendet wird, ist die Sprache der Prädikatenlogik erster Ordnung mit der binären Relation $\in$.
Nun beginnen wir mit der Auflistung von ZFC:

Definition.

1.) Das Extensionalitätsaxiom besagt, dass zwei Mengen übereinstimmen, sofern in ihnen dieselben Elemente enthalten sind.

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y.$$

2.) Das Fundierungsaxiom gibt an, dass jede nichtleere Menge ein bezüglich $\in$ minimales Element enthält und garantiert, dass es keine zyklischen Elementketten, also Aussagen der Form $x_1 \in x_2 \in, ..., x_n \in x_1$, gibt.

$$\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)).$$

3.) Sei ϕ eine Formel in $\mathcal{L}$, in der y nicht frei vorkommt. Das Aussonderungsschema für ϕ lautet folgendermaßen:

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge \phi(x)).$$

4.) Das Paarmengenaxiom lautet:

$$\exists z(x \in z \wedge y \in z).$$

Für $\{x, x\}$ schreiben wir auch $\{x\}$. Aus dem Fundierungsaxiom und dem Paarmengenaxiom folgt, dass es keine Menge x geben kann mit $x \in x$. Ansonsten wäre x das einzige Element in $\{x\}$, aber $x \cap \{x\} \neq \emptyset$, da x in diesem Durchschnitt enthalten ist.

5.) Das Vereinigungsaxiom besagt:

$$\exists A \forall Y \forall x (x \in Y \land Y \in \mathcal{F} \to x \in A).$$

6.) Das Ersetzungsschema sagt aus, dass wir Elemente in Mengen durch andere Mengen ersetzen dürfen, um so neue Mengen zu erhalten. Das heißt auch, dass Bilder von Mengen wieder Mengen sind. Sei also ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel, in der B nicht frei vorkommt. Dann lautet das Ersetzungsschema:

$$\forall x \in A \exists ! y \phi(x, y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \phi(x, y).$$

7.) Das Unendlichkeitsaxiom garantiert die Existenz einer Menge, die die folgenden Mengen enthält: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, ...$ Es besagt:

$$\exists x (\emptyset \in x \land \forall y \in x (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

oder anders formuliert:

$$\exists \text{x(x ist induktiv).}$$

8.) Das Potenzmengenaxiom gibt an, dass für jede Menge eine weitere Menge - ihre Potenzmenge - existiert, deren Elemente genau die Teilmengen der ursprünglichen Menge sind.

$$\exists y \forall z (z \subseteq x \to z \in x).$$

9.) Das Auswahlaxiom wird von einem Großteil der Mathematikerinnen und Mathematiker akzeptiert und verwendet, jedoch gibt es Teilbereiche der Mathematik, die bewusst auf das Auswahlaxiom verzichten. Grundsätzlich stellt es aber ein sehr nützliches Werkzeug dar und wird zum Beispiel für den Beweis des Satzes von Hahn-Banach verwendet. Es besagt, dass es zu jeder Menge von nichtleeren Mengen eine Auswahlfunktion gibt, die aus jeder dieser Mengen ein Element nimmt, und es seiner Menge zuordnet. Anders formuliert lautet das Auswahlaxiom: Für jede Menge mit paarweise disjunkten, nichtleeren Teilmengen gibt es eine Auswahlmenge, das heißt:

$$\begin{gathered} \forall x (\forall y \in x \text{ mit} \\ y \neq \emptyset \land \forall y \in x \forall y' \in x (y \neq y' \to y \cap y' = \emptyset) \to \exists z \forall y \in x \exists u (z \cap y = \{u\})). \end{gathered}$$

2 Generische Erweiterungen

([2] S. 246) Unter einer generischen Erweiterung versteht man ein Modell N, das aus einem kleineren Modell M durch Hinzufügen eines Filters G auf einer Bedingungsmenge $\mathbb{P}$ entsteht. Man bezeichnet eine solche generische Erweiterung mit $M[G]$.

Definition. ([2] S. 172) Eine Bedingungsmenge $\mathbb{P}$ ist ein Tripel ($\mathbb{P}$,$\leq$,$\mathbb{1}$), wobei $\leq$ eine Quasiordnung auf $\mathbb{P}$ ist und $\mathbb{1} \in \mathbb{P}$ das größte Element in $\mathbb{P}$ ist. Eine Quasiordnung ist eine zweistellige Relation, die Reflexivität und Transitivität erfüllt.

Die Elemente aus $\mathbb{P}$ werden Bedingungen genannt. Schreibt man $p \leq q$ für $p, q \in \mathbb{P}$, so versteht man darunter, dass die Bedingung p die Bedingung q erweitert. In der Praxis sind die viele Bedingungsmengen auch antisymmetrisch, daher kann man in den meisten Fällen von $\leq$ als partielle Ordnung sprechen.

Definition. Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge. Man nennt $p, q \in \mathbb{P}$ kompatibel (schreibe $p \not\perp q$), wenn sie eine gemeinsame Erweiterung haben; also wenn es ein $r \in \mathbb{P}$ gibt, sodass $r \leq p$ und $r \leq q$. Man nennt $p, q \in \mathbb{P}$ inkompatibel (schreibe $p \perp q$), wenn p und q nicht kompatibel sind.

2.1 Generische Filter

Definition. ([2] S. 174) Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge. Dann ist $G \subseteq \mathbb{P}$ ein Filter auf $\mathbb{P}$ genau dann, wenn

1.) $\mathbb{1} \in G$,

2.) Für alle $p, q \in G$ existiert ein $r \in G$, sodass $r \leq p$ und $r \leq q$,

3.) Für alle $p, q \in \mathbb{P}$ gilt: Wenn $q \leq p$ und $q \in G$, dann $p \in G$. Diese Eigenschaft von G nennt man auch obere Abgeschlossenheit.

Definition. Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge. Dann ist $D \subseteq \mathbb{P}$ dicht in $\mathbb{P}$ genau dann, wenn für alle $p \in \mathbb{P}$ ein $q \in D$ existiert, sodass $q \leq p$.

Definition. ([2] S. 246) Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge. Ein Filter G heißt $\mathbb{P}$-generisch über einem Modell M, wenn G ein Filter auf $\mathbb{P}$ ist und der Durchschnitt $P \cap D$ nichtleer für alle dichten $D \subseteq \mathbb{P}$ und $D \in M$ ist.

Die Existenz eines solchen generischen Filters garantiert folgendes Lemma:

Lemma 2.1 (Generischer Filter - Existenzlemma). ([2] S.175) Sei M ein ctm von ZF-P und sei $\mathbb{P} \in M$ eine beliebige Bedingungsmenge. Dann gibt es für jede Bedingung $p \in \mathbb{P}$ einen Filter G auf $\mathbb{P}$, sodass $p \in G$ ist und G $\mathbb{P}$-generisch über M ist.

Beweis. Sei $D = \{D_n\}_{n\in\omega}$ die Familie aller dichten Teilmengen von $\mathbb{P}$, wobei die Elemente von D in M liegen. Sei $\{p_n\}_{n\in\omega} \in \mathbb{P}$ eine Folge von Bedingungen, sodass $p = p_0 \in D_0$ gilt. Für jedes weitere $n \in \omega$ sei $p_n \in D_n$. Des Weiteren soll gelten, dass $p_{n+1} \leq p_n$. Die Dichtheit der einzelnen Teilmengen von D garantiert, dass $p_{n+1} \in D_{n+1}$. Dann erfüllt die Menge $G := \{q \in \mathbb{P} : \exists n(p_n \leq q)\}$, dass G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter ist. Außerdem gilt $p \in G$ per Definition von G. $\square$

Definition. ([2] S. 177) Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge. Man nennt $r \in \mathbb{P}$ ein Atom, wenn es keine $p, q \in \mathbb{P}$ gibt, sodass $p, q \leq r$ gilt und p und q inkompatibel sind. Man nennt eine Bedingungsmenge $\mathbb{P}$ atomlos, wenn es keine Atome in $\mathbb{P}$ gibt.

Lemma 2.2. ([2] S. 246 und S. 177) Falls eine Bedingungsmenge $\mathbb{P}$ atomlos ist und G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M, so gilt $G \notin M$.

Beweis. Sei $D = \mathbb{P}/G$ und $r \in \mathbb{P}$. Da $\mathbb{P}$ atomlos ist, existieren p, q mit $p, q \leq r$ und $p \perp q$. Da r beliebig aus $\mathbb{P}$ gewählt wurde, und G nach oben abgeschlossen ist, liegen entweder p, q, oder keins von beiden in G. Daher liegt mindestens eines davon in D, also ist D dicht. Falls $G \in M$ wäre, so wäre auch $D \in M$, jedoch ist $G \cap D = \emptyset$, was einen Widerspruch zu der Aussage, dass G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M ist, darstellt. Daher gilt $G \notin M$. $\square$

Grundsätzlich betrachtet man im Kontext von Forcing nur atomlose Bedingungsmengen, daher kann man im Allgemeinen davon ausgehen, dass der generische Filter kein Element des Grundmodells ist. Wäre der generische Filter im Grundmodell enthalten, so würde sich die generische Erweiterung auch nicht vom Grundmodell unterscheiden und man hätte dadurch nicht erreicht, Bedingungen zum Modell hinzuzufügen.

Um der genauen Definition der generischen Erweiterung näher zu kommen, muss man einen Weg finden, die Elemente in $M[G]$ und ihren Aufbau zu beschreiben:

2.2 P-Namen

Definition. ([2] S. 247) Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung. τ wird als $\mathbb{P}$-Name bezeichnet, wenn τ eine Relation ist und für alle Relationen $\langle \sigma, p \rangle \in \tau$ gilt: σ ist ein $\mathbb{P}$-Name und $p \in \mathbb{P}$. Die Klasse aller $\mathbb{P}$-Namen wird mit $V^{\mathbb{P}}$ bezeichnet.

Definition. Sei M ein transitives Modell von $ZF - P$ und $\mathbb{P} \in M$, dann ist $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M = \{\tau \in M : (\tau \text{ ist ein } \mathbb{P}\text{-Name})^M\}$.

Definition. Sei τ ein $\mathbb{P}$-Name und $G \subseteq \mathbb{P}$. Dann ist die Auswertung von τ durch G rekursiv definiert durch $\mathrm{val}(\tau, G) = \tau_G = \{\mathrm{val}(\sigma, G) : \exists p \in G$ so, dass $\langle \sigma, p \rangle \in \tau\}$. Man kann somit die generische Erweiterung definieren als $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$, wobei M ein transitives Modell von $ZF - P$ ist und $\mathbb{P} \in M$.

Beispiel.

1.) Die leere Menge $\emptyset$ ist ein $\mathbb{P}$-Name und die Auswertung von $\emptyset$ durch G ergibt $\emptyset_G = \{\} = \emptyset$.

2.) Seien σ^1, σ^2 und σ^3 drei $\mathbb{P}$-Namen. Die einfachste Möglichkeit, die Elemente in $M[G]$ aufzuzählen, die σ^1, σ^2 und σ^3 benennen, besteht darin, $\tau = \{\langle \sigma^1, \mathbb{1} \rangle, \langle \sigma^2, \mathbb{1} \rangle, \langle \sigma^3, \mathbb{1} \rangle\}$ zu setzen. Dann ist τ selbst ein $\mathbb{P}$-Name und $\tau_G = \{\sigma^1_G, \sigma^2_G, \sigma^3_G\}$, da per Definition des generischen Filters $\mathbb{1} \in G$ gilt. Diese Darstellung ist unabhängig von G.

3.) Betrachten wir noch einmal die drei $\mathbb{P}$-Namen σ^1, σ^2 und σ^3. Seien p^1, p^2 und p^3 drei Bedingungen aus $\mathbb{P}$ und sei $\pi = \{\langle \sigma^1, p^1 \rangle, \langle \sigma^2, p^2 \rangle, \langle \sigma^3, p^3 \rangle\}$. Dann ist π ein $\mathbb{P}$-Name. Wie π_G aussieht ist abhängig davon, ob p_1, p_2 oder p_3 in G enthalten sind. Es steht jedoch fest, dass π_G eine Teilmenge von $\{\sigma^1_G, \sigma^2_G, \sigma^3_G\}$ ist.

([2] S. 248) Oft werden in abstrakten Diskussionen für $\mathbb{P}$-Namen griechische Buchstaben verwendet. Spricht man jedoch von konkreten Anwendungsbeispielen, kommen oft lateinische Buchstaben mit einem Kreis darüber zum Einsatz. Im Speziellen steht dabei $\mathring{\mathrm{G}}$ für Γ.

Definition. Sei $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ eine Bedingungsmenge. Für eine Menge x sei $\check{\mathrm{x}}= \{\langle \check{\mathrm{y}}, \mathbb{1} \rangle\mathrm{:y}\in \mathrm{x}\}$. Man nennt die Menge $\check{\mathrm{x}}$ "Check-Name".

Beispiel.

1.) $\check{0}= \langle \emptyset, \mathbb{1} \rangle$,

2.) $\check{1}= \langle \{\langle \emptyset, \mathbb{1} \rangle\}, \mathbb{1} \rangle$,

3.) $\check{2}= \{\langle \{\langle \emptyset, \mathbb{1} \rangle\}, \mathbb{1} \rangle, \langle \emptyset, \mathbb{1} \rangle\}$.

Lemma 2.3. Es sei M ein transitives Modell von $ZF - P$ und $\mathbb{P} \in M$ und G ein Filter auf $\mathbb{P}$. Dann gilt:

1.) Für alle $x \in M$ gilt: $\check{\mathrm{x}} \in M^{\mathbb{P}}$ und $\mathrm{val}(\check{\mathrm{x}}, G) = x$.

2.) $M \subseteq M[G]$.

Beweis.

1.) Für jedes $x \in M$ ist $\check{\mathrm{x}} \in M$ und aus $\mathrm{val}(\check{\mathrm{x}}, G) = \{\mathrm{val}(\check{\mathrm{y}}, G) : y \in x\}$ folgt induktiv, dass $\mathrm{x}=\mathrm{val}(\check{\mathrm{x}}, G)$.

2.) Folgt direkt aus 1.). $\square$

Definition. Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge. Dann ist $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in \mathbb{P}\}$.

Nun gilt unter den Voraussetzungen, dass $\mathbb{P} \in M$ und G ein Filter auf $\mathbb{P}$ ist, dass Γ ein $\mathbb{P}$-Name ist und $\Gamma_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$. Daraus folgt, dass $G \in M[G]$.

Lemma 2.4 (Minimalität der generischen Erweiterung). ([2] S. 250) Sei M ein transitives Modell von $ZF - P$ mit $\mathbb{P} \in M$ und G ein Filter auf $\mathbb{P}$. Sei N ein weiteres transitives Modell von $ZF - P$, sodass $M \subseteq N$ und $G \in N$ gilt. Dann ist $M[G] \subseteq N$.

Beweis. Die generische Erweiterung ist definiert als $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$. Nun gilt, dass jedes τ aus $M^{\mathbb{P}}$ auch in N liegt. Dank der rekursiven Definition von τ_G und der Absolutheit von $\text{val}(\tau, G)$ kann man schließen, dass $M[G] \subseteq N$. $\square$

2.3 Die Forcing-Relation

Definition. ([2] S. 251) Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge. Die $\mathbb{P}$-Forcing Sprache $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$ ist eine Klasse von logischen Formeln, die durch Verknüpfung der zweistelligen Relation $\in$ und allen Namen aus $V^{\mathbb{P}}$ als Konstantensymbole entsteht.

Definition. Sei Φ ein Satz aus $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$. Dann hat $M[G] \models \Phi$ die übliche Modell-theoretische Bedeutung. Hierbei wird $\in$ als 'enthalten in' interpretiert und jeder $\mathbb{P}$-Name τ als τ_G.

Definition. Sei M ein ctm von $ZF - P$, $\mathbb{P} \in M$ eine Bedingungsmenge und Ψ ein Satz aus $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$. Dann gilt $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \Psi$ genau dann, wenn $M[G] \models \Psi$ für alle Filter G auf $\mathbb{P}$, sodass $p \in G$ und G $\mathbb{P}$-generisch über M ist. Ist es aus dem Kontext klar ersichtlich, so kann man statt $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \Psi$ auch nur $p \Vdash \Psi$ schreiben. Man spricht $p \Vdash \Psi$ als "p erzwingt ψ".

Beispiel.

1.) Gilt $p \leq q$, so gilt $p \Vdash \check{q} \in \mathring{G}$. Das folgt aus der Eigenschaft des Filters G, dass sobald $p \in G$ gilt, auch $q \in G$ erfüllt ist.

2.) Für alle $(M, \mathbb{P})$-generischen Filter G gilt: $\mathbb{1} \Vdash \Psi$ genau dann, wenn $M[G] \models \Psi$.

3.) Wenn $q \leq p$ und $p \Vdash \phi$, dann gilt $q \Vdash \phi$: Weil $q \in G$ erfüllt ist, folgt $p \in G$ für einen $(M, \mathbb{P})$-generischen Filter G. Da $p \Vdash \phi$ vorausgesetzt wird, muss per Definition $M[G] \models \phi$ gelten und daher auch $q \Vdash \phi$.

3 Das Wahrheits- und das Definierbarkeitslemma

In diesem Abschnitt werden die Beweise des Wahrheits- und Definierbarkeitslemmas behandelt. Das erste Lemma, das Wahrheitslemma, behandelt den Zusammenhang zwischen der im vorherigen Kapitel definierten Forcing-Relation und der generischen Erweiterung M[G]. Intuitiv würde man meinen, dass $M[G] \models \phi$ bestimmte Eigenschaften an G voraussetzt, oder dass alle Bedingungen in G ϕ erzwingen müssen. Das Wahrheitslemma garantiert jedoch, dass es ausreicht, wenn eine einzige Bedingung aus G ϕ erzwingt. Diese Aussage macht Forcing zu einer sehr starken und umgänglichen Methode.

Lemma 3.1 (Das Wahrheitslemma). ([2] S. 252) Sei M ein ctm von $ZF-P$, sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge, ϕ ein Satz aus $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$ und sei G $\mathbb{P}$-generisch über M. Dann gilt $M[G] \models \phi$ genau dann, wenn es ein $p \in G$ gilt, sodass $p \Vdash \phi$.

Die Rückrichtung dieser Aussage ergibt sich sofort aus der Definition, aber die Hinrichtung ist nicht trivial, wie man anhand des folgenden Beispiels erkennen kann: Seien $r_1, r_2 \in G$ und ϕ sei $\check{r}_1 \in \mathring{G} \wedge \check{r}_2 \in \mathring{G}$. Dann gilt $M[G] \models \phi$. Nun wählt man $q \in G$ mit $q \leq r_1$ und $q \leq r_2$. Ist nun F ein beliebiger generischer Filter und $q \in F$, so gilt $r_1, r_2 \in F$. Also gilt $q \Vdash \phi$.

Das zweite Lemma, das Definierbarkeitslemma, gibt an, dass für einen Satz ϕ die Forcing-Notation in M definierbar ist. Man kann also schon in M erkennen, ob ein Satz in der generischen Erweiterung wahr sein wird, abhängig von einer Bedingung p. Das Erstaunliche daran ist, dass man diese Aussage über einen Satz treffen kann, ohne G zu kennen.
Zuvor muss man sich aber noch mit einigen Modell-theoretischen Ausdrücken vertraut machen.

Definition. ([2] S. 93, 94) Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $P \subseteq A$. Sei $k > 0$.

1.) $S \subseteq A^k$ ist definierbar über $\mathfrak{A}$ mit Parametern in P genau dann, wenn es für ein $n \geq 0$ eine $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n)$ mit $k + n$ freien Variablen gibt, sodass für $b_1, ..., b_n \in P$ $S = \{a \in A^k : \mathfrak{A} \models \phi[a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_n]\}$ gilt.

2.) $S \subseteq A^k$ ist definierbar über $\mathfrak{A}$ genau dann, wenn S definierbar über $\mathfrak{A}$ mit Parametern in A ist. S ist definierbar über $\mathfrak{A}$ ohne Parametern genau dann, wenn S definierbar über $\mathfrak{A}$ mit Parametern aus $\emptyset$ ist.

3.) $a \in A$ ist definierbar mit Parametern in P (resp. ohne Parameter) genau dann, wenn die Menge $\{a\}$ definierbar mit (resp. ohne) Parametern in P ist.

Definition. Für eine Menge A mit Teilmenge $P \subseteq A$ ist $\mathcal{D}(A,P)$ die Menge aller Teilmengen von A, die über (A,$\in$) mit Parametern in P definierbar sind. Dann ist $\mathcal{D}^+(A) = \mathcal{D}(A,A)$ und $\mathcal{D}^-(A) = \mathcal{D}(A,\emptyset)$.

Mit diesen Begriffen ausgestattet kann man nun das Definierbarkeitslemma formulieren.

Lemma 3.2 (Das Definierbarkeitslemma). ([2] S. 252) Sei M ein ctm von $ZF - P$. Sei $\mathcal{L} = \{\in\}$ und $\phi(x_1, ..., x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel, wobei $x_1, ..., x_n$ freie Variablen sind. Dann gilt: $\{(p, \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}, \eta_1, ..., \eta_n) : (\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ ist eine Bedingungsmenge $\wedge p \in \mathbb{P} \wedge (\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}) \in M \wedge \eta_1, ..., \eta_n \in M^{\mathbb{P}} \wedge p \Vdash_{\mathbb{P},M} \phi(\eta_1, ..., \eta_n)\}$ liegt in $\mathcal{D}^-(M)$.

Die Beweise für das Wahrheits- und das Definierbarkeitslemma werden im Laufe dieses Kapitels angeführt. Man kann aber zuvor schon mit ihrer Hilfe die Forcing-Relation näher beschreiben, wie die nächsten drei Lemmata zeigen.

3.1 Eigenschaften der Forcing-Relation

Lemma 3.3. ([2] S. 255) Sei $\mathbb{P} \in M$ eine Bedingungsmenge und $\phi, \psi \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$ Sätze. Dann gilt:

1.) Es gibt ein p, das sowohl ϕ als auch $\neg\phi$ erzwingen kann.

2.) Sind ϕ und ψ logisch äquivalent, so gilt $p \Vdash \phi$ genau dann, wenn $p \Vdash \psi$.

3.) Gilt $p \Vdash \phi$ und $q \leq p$, dann $q \Vdash \phi$.

4.) $p \Vdash \phi \wedge \psi$ gilt genau dann, wenn $p \Vdash \phi$ und $q \Vdash \psi$.

5.) $p \Vdash \neg\phi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $p \Vdash \phi$ und $p \Vdash \phi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash \neg\phi$.

6.) $p \Vdash \phi \to \psi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash \phi$ und $q \Vdash \neg\psi$.

7.) $p \Vdash \phi \vee \psi$ gilt genau dann, wenn die Menge $\{q \leq p : q \Vdash \phi$ oder $p \Vdash \psi\}$ dicht unter p ist.

8.) $p \Vdash \phi \leftrightarrow \psi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash \phi \wedge q \Vdash \neg\psi$ und $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash \psi \wedge q \Vdash \neg\phi$.

Beweis.

1.) - 4.) Folgt direkt aus der Definition von Forcing.

5.) Die Hinrichtung der ersten Äquivalenz folgt aus 3.) und 1.). Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass $p \nVdash \neg\phi$. Sei G ein generischer Filter mit $p \in G$ und $M[G] \models \phi$. Dann kann man mittels des Wahrheitslemmas ein $r \in G$ finden, sodass $r \Vdash \phi$. Da G ein Filter ist, gibt es ein $q \in G$, sodass $q \leq r$ und $q \leq p$. Dann folgt laut 3.) $q \Vdash \phi$.

Für die zweite Äquivalenz wendet man das Resultat der ersten Äquivalenz auf $\neg\neg\phi$ an und verwendet 2.).

6.) - 8.) Hier verwendet man wieder die logische Äquivalenz von Sätzen und 2.). $\phi \to \psi$ kann als $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$ geschrieben werden, $\phi \vee \psi$ als $\neg\phi \to \psi$ und $\phi \leftrightarrow \psi$ als $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$. Hierbei wurde für 7.) folgende Äquivalenz verwendet: $p \nVdash \neg\phi \to \psi \Leftrightarrow \exists r \leq p : (r \Vdash \neg\phi) \wedge (r \Vdash \neg\psi) \Leftrightarrow \exists r \leq p \forall q \leq r : (q \nVdash \phi) \wedge (q \nVdash \psi)$, also gilt $p \Vdash \phi \vee \psi$ genau dann, wenn $\forall r \leq p \exists q \leq r : (q \Vdash \phi) \wedge (q \Vdash \psi)$. □

Man kann eine analoge Aussage für Quantoren formulieren:

Lemma 3.4. ([2] S. 256) Sei $\mathbb{P} \in M$ eine Bedingungsmenge und $\phi(x) \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$ eine Formel mit keiner freien Variable außer x. Dann gilt:

1.) $p \Vdash \forall x \phi(x)$ genau dann, wenn $p \Vdash \phi(\tau)$ für alle $\tau \in M^{\mathbb{P}}$.

2.) $p \Vdash \exists x \phi(x)$ genau dann, wenn $\{q \leq p : \exists r \in M^{\mathbb{P}}$, sodass $q \Vdash \phi(\tau)\}$ dicht unter p ist.

Beweis.

1.) $p \Vdash \forall x \phi(x)$ gilt genau dann, wenn für alle generischen Filter G mit $p \in G$, $M[G] \models \forall x \phi(x)$. Nun gilt $M[G] \models \forall x \phi(x)$ genau dann, wenn $M[G] \models \phi(\tau)$ für alle $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Also gilt $p \Vdash \forall x \phi(x)$ genau dann, wenn für alle $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ gilt: $p \Vdash \phi(\tau)$.

2.) Diese Aussage folgt aus 1.), wobei man die in Lemma 3.3 gezeigten Eigenschaften der Forcing-Relation benutzt. Wir benützen zuerst Aussage 2.) und dass $\exists x \phi(x)$ äquivalent zu $\neg\forall x \neg\phi(x)$ ist. Nun gilt laut 5.) $p \Vdash \neg\forall x \neg\phi(x)$ genau dann, wenn $\forall r \leq p, r \nVdash \forall x \neg\phi(x)$. Aber da $r \nVdash \forall x \neg\phi(x)$ genau dann gilt, wenn $r \nVdash \neg\phi(\tau)$ für ein $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ gilt, wieder laut 5.), dass $p \Vdash \neg\forall x \neg\phi(x)$ äquivalent zu $\forall r \leq p \exists \tau \in M^{\mathbb{P}} \exists q \leq r$ mit $q \Vdash \phi(\tau)$. □

Eine entsprechende Aussage lässt sich auch für atomare Sätze formulieren. Doch zuvor noch eine Definition:

Definition. ([2] S. 256) Sei R eine Menge. Dann ist der Definitionsbereich von R definiert als dom(R)=$\{x : \exists y$, sodass $(x, y) \in R\}$.

Lemma 3.5. Sei $\mathbb{P} \in M$ eine Bedingungsmenge und $\tau, \theta, \eta \in M^{\mathbb{P}}$-Namen. Dann gilt:

1.) $p \Vdash \tau = \theta$ gilt genau dann, wenn $\forall \sigma \in \mathrm{dom}(\tau) \cup \mathrm{dom}(\theta) \forall q \leq p$ gilt: $q \Vdash \sigma \in \tau \leftrightarrow q \Vdash \sigma \in \theta$.

2.) $p \Vdash \eta \in \tau$ gilt genau dann, wenn $\{q \leq p : \exists \langle \sigma, r \rangle \in \tau$, sodass $q \leq r \wedge q \Vdash \eta = \sigma\}$ dicht unter p ist.

Der Beweis für dieses Lemma kann wieder mithilfe des Wahrheits- und des Definierbarkeitslemma geführt werden. Aus praktischen Gründen wird er jedoch erst später behandelt, wenn uns weitere 'Werkzeuge' zur Verfügung stehen.

3.2 Die Forcing*-Relation

Das wichtigste Werkzeug für die Beweise des Wahrheits- und des Definierbarkeitslemmas ist die Forcing*-Relation. Die Forcing*-Relation ist eine zweistellige Relation definiert auf $\mathbb{P} \times (\mathcal{FL}) = \{(p, \phi) : p \in \mathbb{P}, \phi \in \mathcal{FL}\}$. Sie stellt eine Verbindung zwischen der Kombinatorik von $\mathbb{P}$ und den semantischen Eigenschaften der generischen Erweiterung dar. Der wesentliche Unterschied zur Forcing-Relation ist dabei, dass die Forcing-Relation für uns nur semantischer Natur ist. Dahingegen bekommen wir mit der Forcing*-Relation eine (rekursiv) definierbare, syntaktische Notation. Das Ziel ist, mittels Induktion über den Aufbau von ϕ zu beweisen, dass für ein Modell M $p \Vdash \phi$ genau dann gilt, wenn $(p \Vdash^* \phi)^M$. Im nächsten Schritt zeigen wir dann das Wahrheits- und da Definierbarkeitslemma für die Forcing*-Relation. Wir beginnen damit, die Forcing*-Relation zu definieren:

3.2.1 Forcing* für atomare Sätze

Definition. ([2] S. 257) $\mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$ ist die Klasse der atomaren Sätze von $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$. Diese haben die Form $\tau = \theta$ und $\eta \in \tau$.

Aufbauend auf Lemma 3.5 beginnen wir, die Forcing*-Relation zuerst für atomare Sätze zu definieren.

Definition. Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge und $\tau, \theta, \eta \in V^{\mathbb{P}}$ Namen.

1.) $p \Vdash^* \tau = \theta$ gilt genau dann, wenn $\forall \sigma \in \text{dom}(\tau) \cup \text{dom}(\theta) \forall q \leq p$ gilt:
$q \Vdash^* \sigma \in \tau \leftrightarrow q \Vdash^* \sigma \in \theta$.

2.) $p \Vdash^* \eta \in \tau$ gilt genau dann, wenn $\{q \leq p : \exists \langle \sigma, r \rangle \in \tau$, sodass
$q \leq r \wedge q \Vdash^* \eta = \sigma\}$ dicht unter p ist.

Beispiel.

1.) $q \Vdash^* \tau = \tau$, da $q \Vdash^* \sigma \in \tau \leftrightarrow q \Vdash^* \sigma \in \tau$ eine Tautologie ist.

2.) Ist $\langle \sigma, r \rangle \in \tau$ und $p \leq r$, so gilt $p \Vdash^* \sigma \in \tau$, da $\{q \leq p : \exists \langle \eta, r \rangle \in \tau$, sodass $q \leq r \wedge q \Vdash^* \sigma = \eta\}$ dicht unter p ist.

Lemma 3.6. ([2] S. 259) Für $\phi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$ gilt:

1.) Wenn $p \Vdash^* \phi$ und $q \leq p$ gelten, dann auch $q \Vdash^* \phi$.

2.) $p \Vdash^* \phi$ gilt genau dann, wenn $\{q \leq p : q \Vdash^* \phi\}$ dicht unter p ist.

Beweis.

1.) folgt direkt aus der Definition von $\Vdash^*$.

2.) Die Hinrichtung folgt aus 1.). Nun zur Rückrichtung. Ist ϕ von der Form $\eta \in \tau$, so verwendet man die Definition der Forcing-Relation und den Umstand, dass wenn $A \subseteq \mathbb{P}$ und $\{q : A \text{ ist dicht unter } q\}$ dicht unter p ist, so ist A dicht unter p. Ist ϕ von der Form $\eta = \tau$ wendet man die vorherige Aussage für $\sigma \in \tau$ und $\sigma \in \eta$. □

Wir versuchen nun die Forcing*-Relation weiter auszubauen und für allgemeinere ϕ zu definieren.

Definition. ([2] S. 258, 259) Sei $\phi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$ und $p \in \mathbb{P}$. $p \Vdash^* \neg\phi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash^* \phi$.

Daraus folgt sofort folgendes Lemma:

Lemma 3.7. Für $\phi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$ und $p \in \mathbb{P}$ gilt $p \Vdash^* \phi$ genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash^* \neg\phi$.

Den Hauptteil des Beweises für das Wahrheits- und Definierbarkeitslemma bildet das nachstehende Lemma. Es stellt einen Zusammenhang zwischen der Forcing*-Relation und Modellen sowie generischen Filtern dar. Hierbei ist zu beachten, dass das Lemma nicht voraussetzt, dass M abzählbar ist. Außerdem kann man ohne Weiteres die Aussage anstatt $(p \Vdash^* \phi)^M$ auch mit $p \Vdash^* \phi$ formulieren, da die Definition der Forcing *-Relation für atomare Sätze absolut ist. Nun aber zum Lemma:

Lemma 3.8. Sei M ein transitives Modell von $ZF - P$ und $\mathbb{P} \in M$. Sei G $\mathbb{P}$-generisch über M und $\phi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}} \cap M$. Dann gilt:

1.) Ist $p \in G$ und $(p \Vdash^* \phi)^M$, so gilt $M[G] \models \phi$.

2.) Gilt $M[G] \models \phi$, so gibt es ein $p \in G$, sodass $(p \Vdash^* \phi)^M$.

Beweis.

1.) Sei $p \in G$. Zuerst wird der Fall, dass ϕ von der Form $\eta \in \tau$ ist, betrachtet. Sei $D = \{q \leq p : \exists\langle\sigma, r\rangle \in \tau, \text{ sodass } q \leq r \wedge q \Vdash^* \eta = \sigma\}$. D ist laut der Definition der Forcing*-Relation dicht unter p und $D \in M$. Sei nun $q \in G \cap D$ und sei $\langle\sigma, r\rangle \in \tau$ mit $q \leq r$ und $q \Vdash^* \eta = \sigma$. Der Induktionsschritt ergibt $M[G] \models \eta = \sigma$, also $\eta_G = \sigma_G$. Da G ein Filter ist, ist $r \in G$ und weil $\langle\sigma, r\rangle \in \tau$ gilt, ist $\sigma_G \in \tau_G$. Also gilt $M[G] \models \eta \in \tau$.
Ist ϕ von der Form $\tau = \theta$ ist das Ziel wieder zu zeigen, dass $\tau_G = \theta_G$ ist. Wir beweisen $\tau_G \subseteq \theta_G$, die andere Richtung folgt analog. Sei also σ_G ein Element aus τ_G, wobei $\langle\sigma, r\rangle \in \tau$ für $r \in G$. Für $q \in G$ mit $q \leq p$ und $q \leq r$ gilt

$q \Vdash^* \sigma \in \tau$ und, wegen der Definition der Forcing*-Relation, auch $q \Vdash^* \sigma \in \theta$. Der Induktionsschritt ergibt $M[G] \models \sigma \in \theta$ und daher gilt $\sigma_G \in \theta_G$.

2.) Angenommen, $M[G] \models \phi$ und ϕ hat die Form $\eta \in \tau$. Um $(p \Vdash^* \phi)^M$ zu zeigen gilt es ein $p \in G$ zu finden, sodass die Menge $D = \{q \leq p : \exists \langle \sigma, r \rangle \in \tau$, sodass $q \leq r \wedge q \Vdash^* \eta = \sigma\}$ dicht unter p liegt. Wir betrachten dazu wieder ein $\langle \sigma, r \rangle \in \tau$ mit $r \in G$ und so, dass $\eta_G = \sigma_G$. Der Induktionsschritt ergibt, dass für ein $p \in G$ gilt, dass $p \Vdash^* \eta = \sigma$. Da G ein Filter ist dürfen wir laut Lemma 3.6 annehmen, dass $p \leq r$ ist. Die erneute Anwendung dieses Lemmas ergibt, dass D dicht unter p liegt.

Nun nehmen wir an, dass ϕ von der Form $\tau = \theta$ ist. Wir definieren nun die Menge D folgendermaßen: Sei D die Menge aller $p \in G$, sodass mindestens eine der folgenden Aussagen wahr ist:

i.) $p \Vdash^* \tau = \theta$,

ii.) Es gibt ein $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau) \cap \mathrm{dom}(\theta)$, sodass $p \Vdash^* \sigma \in \tau$ und $p \Vdash^* \sigma \notin \theta$,

iii.) Es gibt ein $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau) \cap \mathrm{dom}(\theta)$, sodass $p \Vdash^* \sigma \notin \tau$ und $p \Vdash^* \sigma \in \theta$.

Dann ist $D \in M$. Aus der Definition der Forcing*-Relation sowie Lemma 3.7 folgt, dass G dicht ist. Nehmen wir nun an, dass $M[G] \models \phi$ und sei $p \in G \cap D$. Tritt Fall i.) für D ein, so entspricht das genau der gewünschten Aussage.

Tritt Fall ii.) ein, so folgt laut 1.) aus $p \Vdash^* \sigma \in \tau$, dass $M[G] \models \sigma \in \tau$ und daher $\sigma_G \in \tau_G$. Des Weiteren gilt laut Annahme, dass $\tau_G = \theta_G$. Die Induktion besagt nun, dass für ein $q \in G$ $q \Vdash^* \sigma \in \theta$ gilt. Sei nun $r \in G$ mit $r \leq p$ und $r \leq q$. Dann gilt laut Lemma 4.6, dass $r \Vdash^* \sigma \in \theta$. Da aber $r \leq p$ gewählt war, ist das ein Widerspruch zu $p \Vdash^* \sigma \notin \theta$.

Fall iii.) geht analog. □

Lemma 3.9. Sei M ein ctm von $ZF - P$ und $\mathbb{P} \in M$. Für $p \in \mathbb{P}$ und $\phi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}} \cap M$ gilt $p \Vdash \phi$ genau dann, wenn $(p \Vdash^* \phi)^M$.

Beweis. Die Rückrichtung folgt aus Lemma 3.8.1.) und daraus, dass wir nur atomare Sätze betrachten und deshalb die Relativierung durch M vernachlässigen können.

Die Hinrichtung beweisen wir durch Widerspruch. Angenommen, $p \Vdash \phi$ und $(p \nVdash^* \phi)^M$. Laut Lemma 3.7 finden wir dann ein $q \leq p$ sodass $q \Vdash^* \neg\phi$, was äquivalent ist zu $\neg \exists r \leq q$, sodass $r \Vdash^* \phi$. Sei nun G ein generischer Filter und $q \in G$. Dann ist auch $p \in G$ und laut der Forcing-Definition gilt somit $M[G] \models \phi$. Sei nun $s \in G$ so, dass $s \Vdash^* \phi$. Da G ein Filter ist und $s, p \in G$ liegen, finden wir ein $r \in G$ mit $r \leq s$ und $r \leq p$. Laut Lemma 3.6 gilt dann $r \Vdash^* \phi$, was ein Widerspruch zur vorherigen Annahme ist. □

Zwar wurde die Forcing*-Relation bisher nur für atomare Sätze definiert, jedoch können wir daraus nun direkt das Wahrheits- und das Definierbarkeitslemma für atomare Sätze herleiten. Aus Lemma 3.8 folgt das Wahrheitslemma, indem man die Forcing*-Relation durch die Forcing-Relation ersetzt. Das Definierbarkeitslemma ergibt sich aus Lemma 3.9, da $(p \Vdash^* \phi)^M$ offensichtlich definierbar über M ist.

3.2.2 Forcing* für alle Sätze

Definition. ([2] S. 260) Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge. Die Relation $p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \phi$ für Sätze $\phi \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$ ist folgendermaßen definiert:

1.) Für $\phi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$ haben wir die Forcing*-Relation bereits definiert.

2.) $p \Vdash^* \phi \wedge \psi$ gilt genau dann, wenn $p \Vdash^* \phi$ und $q \Vdash^* \psi$.

3.) $p \Vdash^* \neg\phi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash^* \phi$.

4.) $p \Vdash^* \phi \to \psi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash^* \phi$ und $q \Vdash^* \neg\psi$.

5.) $p \Vdash^* \phi \vee \psi$ gilt genau dann, wenn die Menge $\{q : q \Vdash^* \phi$ oder $q \Vdash^* \psi\}$ dicht unter p ist.

6.) $p \Vdash^* \phi \leftrightarrow \psi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash^* \phi \wedge q \Vdash^* \neg\psi$ und $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash^* \psi \wedge q \Vdash^* \neg\phi$.

7.) $p \Vdash^* \forall x\phi(x)$ genau dann, wenn $p \Vdash^* \phi(\tau)$ für alle $\tau \in M^{\mathbb{P}}$.

8.) $p \Vdash^* \exists x\phi(x)$ genau dann, wenn $\{q : \exists\tau \in V^{\mathbb{P}}$, sodass $q \Vdash^* \phi(\tau)\}$ dicht unter p ist.

Im nächsten Lemma wird die Erweiterung der Lemmata 3.6 und 3.7 für alle Sätze aus $\mathcal{FL}$ formuliert. Der Beweis wird über Induktion über den Aufbau von ϕ geführt, wobei alle Fälle von 2.) bis 8.) (für 1.) siehe Lemma 3.6 und 3.7) direkt aus der Definition folgen.

Lemma 3.10. ([2] S. 261, 262) Sei $\phi \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$. Dann gilt:

1.) Wenn $p \Vdash^* \phi$ und $q \leq p$ gelten, dann auch $q \Vdash^* \phi$.

2.) $p \Vdash^* \phi$ gilt genau dann, wenn $\{q \leq p : q \Vdash^* \phi\}$ dicht unter p ist.

3.) $p \Vdash^* \phi$ gilt genau dann, wenn $\neg\exists q \leq p$, sodass $q \Vdash^* \neg\phi$.

Beweis.

1.) folgt aus Induktion über den Aufbau von ϕ.

2.) Die Hinrichtung folgt aus 1.). Die Rückrichtung folgt aus Induktion.

3.) folgt aus 2.). □

Das folgende Lemma ist eine Erweiterung von Lemma 3.8 von atomaren ϕ auf alle $\phi \in \mathcal{FL}$. Es formuliert das Wahrheitslemma in der Sprache der Forcing*-Relation.

Lemma 3.11. Sei M ein transitives Modell von $ZF - P$ und $\mathbb{P} \in M$. Sei G $\mathbb{P}$-generisch über M und $\phi \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$. Dann gilt:

1.) Ist $p \in G$ und $(p \Vdash^* \phi)^M$, so gilt $M[G] \models \phi$.

2.) Gilt $M[G] \models \phi$, so gibt es ein $p \in G$, sodass $(p \Vdash^* \phi)^M$.

Beweis. Der Beweis funktioniert wieder mittels Induktion über den Formelaufbau von ϕ. Der erste Fall - atomare Sätze - wurde bereits im Beweis von Lemma 3.8 behandelt. Die restlichen sieben Fälle folgen fast unmittelbar aus der Definition, daher werden hier nur zwei Fälle behandelt:
Der erste Fall ist $p \Vdash^* \neg\phi$: Für 1.) nehmen wir an, dass $p \in G$ und $(p \Vdash^* \neg\phi)^M$ sowie $M[G] \models \phi$ gelten. Sei $r \in G$ so, dass $(r \Vdash^* \phi)^M$ und sei $q \in G$ so, dass $q \leq p$ und $q \leq r$. Dann ist aber $(r \Vdash^* \phi)^M$ und $q \leq p$ laut Lemma 3.10 ein Widerspruch zu $p \Vdash^* \neg\phi$. Hierbei verwendet man die Interpretation dieser Aussagen in M und $M \Vdash ZF - P$.
Für 2.) definieren wir wieder eine Menge $D = \{p \in \mathbb{P} : (p \Vdash^* \phi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\phi)^M\} \in M$. Laut der Definition von $p \Vdash^* \neg\phi$ ist D dicht. Sei nun $p \in G \cap D$. Wir nehmen an, dass $M \models \neg\phi$. Gilt $(p \Vdash^* \neg\phi)$ so sind wir fertig. Gilt jedoch $(p \Vdash^* \phi)$, so folgt daraus laut 1.) $M[G] \models \phi$, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist.
Der zweite Fall ist $p \Vdash^* \exists x\phi(x)$: Für 1.) nehmen wir an, dass $p \in G$ ist und $(p \Vdash^* \exists x\phi(x))^M$. Sei $D = \{q : \exists\tau \in M^{\mathbb{P}}$, sodass $(q \Vdash^* \phi(\tau))^M\}$. Laut der Definition der Forcing*-Relation ist dann D dicht unter p. Da G ein generischer Filter ist und $p \in G$ liegt, finden wir $q \leq p$ und $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ so, dass $q \in G$ und $(q \Vdash^* \phi(\tau))^M$. Dann gilt für $\phi(\tau)$ laut der Induktion, dass $M[G] \models \phi(\tau)$ und daher $M \models \exists x\phi(x)$.
Für 2.) nehmen wir an, dass $M \models \exists x\phi(x)$. Sei $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ so, dass $M[G] \models \phi(\tau)$. Dann folgt aus der Induktion, dass für ein $p \in G$ mit $(p \Vdash^* \phi(\tau))^M$ gilt, dass $(p \Vdash^* \exists x\phi(x))^M$. $\square$

Nun folgen das Wahrheits- und das Definierbarkeitslemma direkt. Lemma 3.9 besagt, dass $p \Vdash \phi$ äquivalent zu $(p \Vdash^* \phi)^*$ ist. Wir dürfen also in Lemma 3.11 die Forcing*-Relation durch die Forcing-Relation ersetzen und erhalten das Wahrheitslemma. Das Definierbarkeitslemma folgt direkt daraus, dass $(p \Vdash^* \phi)^M$ definierbar über M ist.

4 Anwendungen

4.1 Die generische Erweiterung ist ein Modell von ZFC

Eine sehr nützliche Anwendung des Wahrheits- und des Definierbarkeitslemmas besteht darin, zeigen zu können, dass falls M ein Modell von ZFC ist, so bleibt auch die generische Erweiterung von M ein Modell von ZFC. Wir betrachten für den Beweis jedes Axiom von ZFC.

Extensionalitäts-, Fundierungs-, Paarmengen- und Vereinigungsaxiom

Lemma 4.1. ([2] S. 248, 249) Sei M ein transitives Modell von $ZF - P$ mit $\mathbb{P} \in M$ und G ein Filter auf $\mathbb{P}$. Dann ist $M[G]$ ein Modell von das Extensionalitäts-, Fundierungs-, Paarmengen-, und das Vereinigungsaxiom.

Beweis.

1.) Das Extensionalitätsaxiom: $M[G]$ ist transitiv, da jedes Element τ_G von der Form σ_G ist, und somit eine Teilmenge von $M[G]$ ist. Daher gilt $M[G] \models$ Extensionalitätsaxiom.

2.) Das Fundierungsaxiom: Da $M[G]$ eine Klasse ist, gilt das Fundierungsaxiom in der generischen Erweiterung.

3.) Das Paarmengenaxiom: Das Paarmengenaxiom folgt leicht unter Betrachtung der nachstehenden Definition.

Definition. Für zwei $\mathbb{P}$-Namen σ, τ können wir weitere Namen für das geordnete Paar $\text{op}(\sigma, \tau)$ und das ungeordnete Paar $\text{up}(\sigma, \tau)$ finden. Diese sind wie folgt definiert: $\text{up}(\sigma, \tau) = \{\langle \sigma, \mathbb{1} \rangle \, \langle \tau, \mathbb{1} \rangle\}$ und $\text{op}(\sigma, \tau)$=$\text{up}(\text{up}(\sigma, \sigma)$,$\text{up}(\sigma, \tau))$.

Dann gilt:
Für $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ sind $\text{up}(\sigma, \tau)$ und $\text{op}(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$ und $\text{val}(\text{up}(\sigma, \tau), G) = \{\sigma_G, \tau_G\}$ und $\text{val}(\text{op}(\sigma, \tau), G) = \langle \sigma_G, \tau_G \rangle$. Daraus folgt, dass für $a, b \in M[G]$ auch $\{a, b\} \in M[G]$ liegt. Somit gilt $M[G] \models$ Paarmengenaxiom.

4.) Das Vereinigungsaxiom: Es reicht zu zeigen, dass wenn $a \in M[G]$ ist, dann gibt es ein $b \in M[G]$ mit $\cup a \subseteq b$. Sei also $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ so, dass $\tau_G = a$ und sei $b = \eta_G$, wobei $\eta = \cup \text{dom}(\tau)$.
Für $c \in a = \tau_G$ gibt es ein $\sigma \in \text{dom}(\tau)$, sodass $c = \sigma_G$. Da $\eta = \cup \text{dom}(\tau)$ ist, gilt, dass $\sigma \in \eta$ und daher auch $c = \sigma_G \subseteq \eta_G = b$. Somit erhalten wir $\cup a \subseteq b$.
Nun gilt es noch zu zeigen, dass $b \in M[G]$ liegt. Das folgt aber daraus, dass die Vereinigung von $\mathbb{P}$-Namen wieder ein $\mathbb{P}$-Name ist und daher $\eta = \cup \text{dom}(\tau) \in M$ liegt. Somit haben wir gezeigt, dass $M[G] \models$ Vereinigungsaxiom. □

Unendlichkeitsaxiom und Aussonderungsschema ([2] S. 253) Um zu zeigen, dass $M[G]$ diese Axiome glaubt, muss man voraussetzen, dass G ein generischer Filter ist, wohingegen es zuvor ausgereicht hat, dass G ein Filter ist.

Lemma 4.2. Sei M ein ctm von $ZF - P$, $\mathbb{P} \in M$ eine Bedingungsmenge und G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über über M. Dann ist $M[G]$ ein Modell von allen Axiomen in $ZF - P$ ausgenommen dem Ersetzungsschema.

Beweis.

5.) Das Unendlichkeitsaxiom: Da $\omega \in M[G]$ liegt, gilt in dieses Axiom in $M[G]$.

6.) Das Aussonderungsschema: Bevor wir $M[G] \models$ Aussonderungsschema zeigen, werfen wir noch einen Blick auf folgende Bemerkung:
Wir müssen zeigen, dass für eine Formel ϕ, in der y nicht frei, aber dafür x, z und vielleicht auch $v^0, ..., v^{n-1}$ frei vorkommen gilt:

$$\forall z, v^0, ..., v^{n-1} \in N \exists y \in N \forall x \in N, \text{ sodass}$$
$$x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi^N(x, z, v^0, ..., v^{n-1}).$$

Seien $\eta_G, \sigma^0_G, ..., \sigma^{n-1}_G \in N$. Diese Elemente entsprechen den Variablen $z, v^0, ..., v^{n-1} \in M[G]$. Sei $S = \{x \in \tau_G : \phi^N(x, \eta_G, \sigma^0_G, ..., \sigma^{n-1}_G)\}$. Unser Ziel ist zu beweisen, dass $S \in N$, das heißt wir müssen einen Namen $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ finden, sodass $\tau_G = S$.
Der springende Punkt ist, dass wir S folgendermaßen umschrieben können: $S = \{\theta_G : \theta \in \text{dom}(\eta) \wedge M[G] \models (\theta \in \eta \wedge \phi(\theta, \eta, \sigma^0, ..., \sigma^{n-1}))\}$. Dann können wir den zugehörigen Namen τ so definieren:

$$\tau = \{\theta_G : \theta \in \text{dom}(\eta) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash (\theta \in \eta \wedge \phi(\theta, \eta, \sigma^0, ..., \sigma^{n-1}))\}.$$

Dann gilt laut dem Definierbarkeitslemma $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. $\tau_G = \{\theta_G : \theta \in \text{dom}(\eta) \wedge \exists p \in G, \text{ sodass } p \Vdash (\theta \in \eta \wedge \phi(\theta, \eta, \sigma^0, ..., \sigma^{n-1}))\} \subseteq S$ laut der Definition von $\Vdash$. Sei $\theta_G \in S$ wobei $\theta \in \text{dom}(\tau)$. $M[G] \models (\theta \in \eta \wedge \phi(\theta, \eta, \sigma^0, ..., \sigma^{n-1}))$. Das Wahrheitslemma garantiert uns, dass wir ein $p \in G$ finden, sodass
$p \Vdash (\theta \in \eta \wedge \phi(\theta, \eta, \sigma^0, ..., \sigma^{n-1}))$. Also gilt $\langle \theta, p \rangle \in \tau$ und daher $\theta_G \in \tau_G$. □

Potenzmengenaxiom, Ersetzungsschema und Auswahlaxiom

Lemma 4.3. ([2] S. 253, 254) Sei M ein ctm von ZF, sei $\mathbb{P} \in M$ eine Bedingungsmenge und sei G $\mathbb{P}$-generisch über M. Dann gilt $M[G] \models ZF$ und gilt $M \models ZFC$, so gilt sogar $M[G] \models ZFC$.

Beweis.

7.) Das Potenzmengenaxiom: Wir müssen zeigen, dass für ein $a \in M[G]$ ein $b \in M[G]$ existiert, sodass $\mathcal{P}(a) \cap M[G] \subseteq b$.
Sei also $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, sodass $\tau_G = a$. Dann definieren wir eine Menge aller $\theta \in M^{\mathcal{P}}$

mit dom(θ) $\subseteq$dom(τ) durch $Z = (\mathcal{P}(\mathrm{dom}(\tau) \times \mathbb{P}))^M$. Sei $\eta = Z \times \{\mathbb{1}\}$ und sei $b = \eta_G = \{\theta_G : \theta \in Z\}$. Wir haben also eine 'Formel' gefunden, wie wir für ein beliebiges $a \in M[G]$ ein $b \in M[G]$ finden können, und müssen noch zeigen, dass dieses b auch erfüllt, dass $\mathcal{P}(a) \cap M[G] \subseteq b$.
Sei also $c \in b$ und sei $\chi \in M^{\mathbb{P}}$, sodass $\chi_G = c$. Sei $\theta = \{\langle \sigma, p\rangle : \sigma \in$dom$(\tau)\wedge$
$p \Vdash \sigma \in \chi$. $\theta \in Q$ gilt laut der Definition von θ und $\theta \in M$ ist aufgrund des Definierbarkeitslemmas erfüllt. Wenn wir zeigen, dass $\theta_G = c$ ist, so sind wir fertig. $\theta_G \subseteq c$ gilt, da $\theta_G = \{\sigma_G : \exists p \in G$ sodass $p \Vdash \sigma \in \chi$ und $\forall \sigma_G$ gilt $\sigma_G \in \chi_G$. Die andere Richtung folgt daraus, dass $c \subseteq a$ und $a = \tau_G$ ist und daher gibt es ein $\sigma_G \in$dom(τ), sodass c die Form σ_G hat. Da dann $\sigma_G \in \chi_G$ ist finden wir laut dem Wahrheitslemma ein $p \in G$, sodass $p \Vdash \sigma \in \theta$ und daher $\langle \sigma, p\rangle \in \theta$, also $\sigma_G \in \theta_G$.

8.) Das Ersetzungsschema: Wir betrachten wieder eine Formel $\phi(x, y, v^0, ..., v^{n-1})$ wie schon zuvor im Aussonderungsschema definiert. Sei $a \in M[G]$ und $(\forall x \in a \exists y \phi(x, y, v^0, ..., v^{n-1}))^{M[G]}$. Unser Ziel ist, ein $b \in M[G]$ zu finden, das $(\forall x \in a \exists y \in b \phi(x, y, v^0, ..., v^{n-1}))^{M[G]}$ erfüllt. Sei also $a = \tau_G \in M[G]$. Dann gilt, dass die generische Erweiterung $\forall a \in \tau \exists y \phi(x, y, v^0, ..., v^{n-1})$ glaubt. Mithilfe des Definierbarkeitslemmas können wir nun die Menge Q aller Namen finden, sodass für alle $p \in \mathbb{P}$ und alle $\sigma \in$dom(τ) gilt, dass wenn Namen θ mit $p \Vdash \phi(\sigma, \theta)$ existieren, dann muss wenigstens ein θ in Q sein. Sei nun $\pi = Q \times \{1\}$ und $b = \pi_G = \{\theta_G : \theta \in Q\}$.
Um zu zeigen, dass die Aussage $(\forall x \in a \exists y \in b \phi(x, y, v^0, ..., v^{n-1}))$ in der generischen Erweiterung gilt, fixiert man $x \in a$, das heißt für ein $\sigma \in$dom(τ) ist $x = \sigma_G$. Dann glaubt die generische Erweiterung, dass es ein y gibt, für das $\phi(\sigma, y, v^0, ..., v^{n-1})$ gilt. Wir wollen also einen Namen θ finden, sodass $\phi(\sigma, \theta, v^0, ..., v^{n-1})$ in der generischen Erweiterung gilt. Das Wahrheitslemma garantiert uns, dass wir ein $p \in G$ finden, sodass $p \Vdash \phi(\sigma, \theta)$, also gibt es ein $\theta \in Q$ mit $p \Vdash \phi(\sigma, \theta)$. Wenn also $y = \theta_G$ ist, so ist $y \in b$ und $(\phi(x, y, v^0, ..., v^{n-1}))^{M[G]}$.

9.) Das Auswahlaxiom. Wir zeigen eine äquivalente Formulierung des Auswahlaxioms, und zwar, dass $a = \tau_G \in M[G]$ eine Wohlordnung in $M[G]$ hat. Wir betrachten also $\tau \in M[G]$ und dom$(\tau) = \{\sigma^z : z \leq \alpha\}$. Sei $\mathring{\mathrm{f}}$ der Name $\{\langle \mathrm{op}(\check{z},\sigma^z), \mathbb{1}\rangle : z \leq \alpha\}$. In der generischen Erweiterung bekommen wir nun f=$\mathring{\mathrm{f}}_G$ und laut der Definition von op ist f=$\{\langle (\mathrm{z},\sigma^z_G), \mathbb{1}\rangle : z \leq \alpha\}$. f ist also eine Funktion mit Definitionsbereich α und $a \subseteq$ ran(f). In der generischen Erweiterung können wir also eine Wohlordnung auf a definieren indem wir x$\lhd$y genau dann gelten lassen, wenn min$\{z \leq \alpha : f(z) = x\}$<min$\{z \leq \alpha : f(z) = y\}$ gilt. $\square$

4.2 Ein Modell von nicht CH

([2] S. 244) In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man ein Modell N erhält, das $ZFC+\neg CH$ glaubt. Genauer gesagt wollen wir zu einem gegebenen abzählbaren, transitiven Modell M von ZFC eine generische Erweiterung finden, in der $|\mathbb{R}| \geq \aleph_2$ gilt. Unser Plan dabei ist, dem Grundmodell ω_2-viele Funktionen von ω nach $\{0,1\}$ hinzuzufügen. Dafür betrachten für folgende Bedingungsmenge:

Definition. Die Menge $Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$ aller endlichen partiellen Funktionen mit Definitionsbereich $\omega_2 \times \omega$ und Bildmenge $\{0,1\}$ bildet eine Bedingungmenge. Hierbei ist $\leq$ als $\supseteq$ und $\mathbb{1}$ als $\emptyset$ zu interpretieren.

([2] S. 173) Was bedeutet diese partielle Ordnung nun für die einzelnen Bedingungen? Es gilt $p \supseteq p$ genau dann, wenn p q als Funktion erweitert. p und q heißen in diesem Kontext kompatibel, wenn es eine Funktion $r \in Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$ gibt, die $r \supseteq p$ und $r \supseteq q$ erfüllt. Anders betrachtet gilt $p \not\perp q$ genau dann, wenn $p \cup q \in Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$, was äquivalent ist zu p und q stimmen auf dom(p)∩dom(q) überein.
Wir können uns die Bedingungen in $Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$ als Approximationen für eine Funktion $f : \omega_2 \times \omega \to \{0,1\}$ vorstellen.

Definition. ([2] S. 175) Sei G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter, wobei $\mathbb{P}$ die vorhin definierte Bedinungsmenge darstellt. Dann ist die Funktion, die durch die Bedingungen von $\mathbb{P}$ approximiert wird, gegeben durch $f_G = \cup G = \cup\{p : p \in G\}$.

Lemma 4.4. Unter den in der vorherigen Definition eingeführten Voraussetzungen ist f_G eine Funktion und liegt in der generischen Erweiterung.

Lemma 4.5. Da G ein Filter auf $\mathbb{P}$ ist, sind die Elemente von G paarweise kompatibel. Es gilt also für alle Funktionen $p, q \in G$, dass p und q auf dom(p)∩dom(q) übereinstimmen. Aus diesem Grund ist die Vereinigung über alle Funktionen von G selbst eine Funktion. $f_G \in M[G]$, da $G \in M[G]$.

Wir haben es also tatsächlich geschafft, eine Funktion von $\omega_2 \times \omega$ nach $\{0,1\}$ zu konstruieren. Nun gilt es aber noch zu zeigen, dass f_G auch wirklich jedes Element dieser beiden Mengen erfasst.

Lemma 4.6. Sei G ein generischer Filter auf $\mathbb{P} = Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$ und sei $f_G = \cup G = \cup\{p : p \in G\}$. Dann hat f_G vollen Definitionsbereich und volles Bild.

Beweis. Betrachten wir die Mengen $D_i = \{q \in Fn(\omega_2 \times \omega, 2) : i \in \text{dom(q)}\}$ und $R_j = \{q \in Fn(\omega_2 \times \omega, 2) : j \in \text{ran(q)}\}$. Diese Mengen sind dicht, da $\omega_2 \times \omega$ eine unendlich große Menge ist und $\{0,1\}$ nichtleer ist. Das Existenzlemma für generische Filter garantiert uns, dass es einen generischen Filter G gibt, der erfüllt, dass $G \cap D_i$ und $G \cap R_j$ für alle $i \in \omega_2 \times \omega$ und für alle $j \in \{0,1\}$ nichtleer sind. Das bedeutet, dass es mindetens eine Funktion $g : \omega_2 \times \omega \to \{0,1\}$ in G gibt, sodass für alle $i \in \omega_2 \times \omega$ $i \in$ dom(g) gilt. Analog gibt es auch eine Funktion $h : \omega_2 \times \omega \to \{0,1\}$ in G, sodass für alle $j \in \{0,1\}$ $j \in$ ran(h) gilt. Da wir f_G als die Vereinigung über alle Funktionen in G definiert haben, wird sowohl der volle Definitionsbereich, als auch der volle Bildbereich angenommen. □

([2] S. 245) Wir können die Funktion f_G nun als Zuordnungsvorschrift interpretieren, die für jedes $\alpha \in \omega_2$ eine Komponentenfunktion $h_\alpha : \omega \to \{0,1\}$ definiert.

Lemma 4.7. Wir betrachten $h_\alpha : \omega \to \{0,1\}$ mit $h_\alpha(n) = f_G(\alpha, n)$. Dann gilt:

1.) h_α hat vollen Definitionsbereich.

2.) Es gibt tatsächlich ω_2 viele, paarweise verschiedene h_α.

Beweis.

1.) Betrachten wir die Menge $E_{\alpha,n} = \{p \in \mathbb{P} : (\alpha, n) \in \text{dom(p)}\}$. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $E_{\alpha,n}$ dicht ist. Sei dafür $p \in \mathbb{P}$. Wenn $(\alpha, n) \in$ dom(p) ist, so sind wir fertig, da wir einfach $q = p$ setzen können. Falls das nicht der Fall sein sollte, so setzen wir $q = p \cup ((\alpha, n), 1)$. Dann ist erfüllt, dass $q \in E_{\alpha,n}$ liegt und q eine Erweiterung von p als Funktion darstellt. Also ist $E_{\alpha,n}$ dicht. Da der G als generischer Filter diese Menge trifft, gilt für alle α und n, dass $(\alpha, n) \in$ dom(p). Da p eine Funktion von $\omega_2 \times \omega \to \{0,1\}$ ist, nimm h_α vollen Definitionsbereich an.

2.) Es gilt zu zeigen, dass für $\alpha \neq \beta$ $h_\alpha \neq h_\beta$ gilt. Sei $F_{\alpha,\beta} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n$, sodass $(\alpha, n) \in$ dom(p), $(\beta, n) \in$ dom(p), $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$. Wir wollen wieder zeigen, dass diese Menge dicht ist. Sei also $p \in \mathbb{P}$. Da der Definitionsbereich von p endlich ist, finden wir ein n, sodass für kein α gilt, dass $(\alpha, n) \in$ dom(p). Definieren wir also $q = p \cup ((\alpha, n), 1) \cup ((\beta, n), 0)$, so liegt q in $F_{\alpha,\beta}$ und erfüllt $q \leq p$. Daher ist $F_{\alpha,\beta}$ dicht. Da G ein generischer Filter ist, trifft er $F_{\alpha,\beta}$. Somit existiert kein n, das $h_\alpha(n) = h_\beta(n)$ erfüllt. □

Wir haben also der generischen Erweiterung eine Folge von Komponentenfunktionen $\langle h_\alpha : \alpha \in \omega_2 \rangle$ hinzugefügt, deren Elemente in 2^ω liegen. Somit glaubt $M[G]$, dass die Mächtigkeit von 2^ω mindestens so groß wie ω_2 ist. Daher gilt $M[G] \models ZFC + \neg CH$.
Wir wären an dieser Stelle grundsätzlich schon fertig, jedoch gilt es noch einen wesentlichen Aspekt zu betrachten. Wir müssen zeigen, dass die Kardinalzahlen aus dem Grundmodell M auch Kardinalzahlen in der generischen Erweiterung bleiben und deren Reihenfolge durch das Hinzufügen von G nicht durcheinander gerät. Bevor wir dies beweisen können brauchen wir zunächst ein paar Definitionen.

Definition. ([2] S. 249) Ist R eine Wohlordnung auf A, dann ist type(A;R) (oder auch type(A), wenn sich R aus dem Kontext ergibt) die eindeutige Ordinalzahl α, sodass (A;R)$\cong$($\alpha; \in$).

Definition. ([2] S. 74) Für eine Limes-Ordinalzahl γ ist die Kofinalität von γ definiert als cf(γ) = min{type(x) : $X \subseteq \gamma \wedge$ sup(X)=γ}. γ heißt regulär genau dann, wenn cf(γ)=γ.

Definition. ([2] S. 263) Sei $\mathbb{P} \in M$. Dann gilt:

1.) $\mathbb{P}$ erhält Kardinalzahlen genau dann, wenn für alle generischen Filter G gilt: (β ist eine Kardinalzahl)^M ist äquivalent zu (β ist eine Kardinalzahl)$^{M[G]}$ für alle $\beta < o(M)$.

2.) $\mathbb{P}$ erhält Kofinalitäten genau dann, wenn für alle generischen Filter G gilt: cf$^M(\gamma)$ =cf$^{M[G]}(\gamma)$ für alle Limes-Ordinalzahlen $\gamma < o(M)$.

Eine hinreichende Bedingung für die Erhaltung von Kardinalzahlen ist die sogenannte 'abzählbare Antiketten Bedingung' (abgekürzt durch 'ccc' für 'countable chain condition'), wie wir in Lemma 4.11 beweisen werden.

Definition. ([2] S. 172) Eine Antikette ist eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{P}$, deren Elemente paarweise inkompatibel sind. $\mathbb{P}$ hat die ccc genau dann, wenn jede Antikette in $\mathbb{P}$ abzählbar ist.

Wieso hat nun die partielle Ordnung $Fn(\omega_2 \times \omega, \{0,1\})$ die ccc? Das zeigt folgendes Lemma:

Lemma 4.8. ([2] S. 173, 174) $Fn(I, J)$ hat die ccc genau dann, wenn $I = \emptyset$ oder J abzählbar ist.

Nun ist in unserem Fall $I = \omega_2 \times \omega$ zwar nicht die leere Menge, aber $J = \{0, 1\}$ ist abzählbar.

Beweis. Falls I oder J die leere Menge sein sollte, so besteht $Fn(I, J)$ nur aus $\{\emptyset\}$, was trivialerweise die ccc erfüllt. Wir können also annehmen, dass I und J nichtleer sind.
Angenommen, J ist nicht abzählbar. Für ein $i \in I$ bilden dann die Funktionen $\{(i, j)\}$ eine nicht abzählbare Antikette.
Für die Rückrichtung brauchen wir folgendes Lemma:

Definition (Delta-System)**.** ([2] S.166) Eine Familie von Mengen A formt ein Delta-System mit Ursprung R genau dann, wenn für zwei beliebige Mengen $X, Y \in A$ mit $X \neq Y$ $X \cap Y = R$ gilt.

Lemma 4.9 (Delta-System Lemma). Sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl und sei A eine Familie von endlichen Mengen mit $|A| = \kappa$. Dann gibt es eine Teilmenge $B \in [A]^\kappa = \{X \subseteq A : |X| = \kappa\}$ so, dass B ein Delta-System formt.

Der Beweis des Delta-Lemmas ist in ([2] S.166, 167) zu finden.
Nach diesem kurzen Einschub machen wir weiter mit dem Beweis der Rückrichtung. Angenommen J ist abzählbar. Wir betrachten die Elemente $p_\alpha \in \mathbb{P}$, wobei $\alpha \leq \omega_1$ ist, und zeigen, dass diese nicht paarweise inkompatibel sein können. Daraus wird folgen, dass jene Mengen, die Antiketten bilden, abzählbar sind und somit $\mathbb{P}$ die ccc erfüllt. Sei nun also S_α= dom(p_α) $\in [I]^{<\omega}$. Wir wenden das Delta-System Lemma an und erhalten, dass es eine überabzählbare Menge $B \subseteq \omega_1$ und eine endliche Menge $R \subseteq I$, den Ursprung, gibt, sodass für zwei beliebige, unterschiedliche Elemente α, β von B $S_\alpha \cap S_\beta$ gilt. Da $J^R = \{X \subseteq J : |X| = R\}$ endlich ist, können wir zwei verschiedene α und β in B fixieren, sodass $p_\alpha|_R = p_\beta|_R$. Das heißt, dass für p_α und p_β gilt, dass R=dom(p_α)$\cap$dom(p_β). Somit sind also die beiden Funktionen inkompatibel. □

Nun gilt es nur noch zu beweisen, dass die ccc eine hinreichende Bedingung an $\mathbb{P}$ ist, um Kardinalzahlen zu erhalten. Dafür brauchen wir noch eine kurze Betrachtung:

Lemma 4.10. ([2] S. 264) Wenn $\mathbb{P}$ Kofinalitäten erhält, so erhält $\mathbb{P}$ auch Kardinalzahlen.

Der Beweis für dieses Lemma ist in ([2] S. 264) zu finden. Mithilfe dieser Aussage können wir unser gewünschtes Resultat umformulieren in ein 'Approximationslemma'. Betrachten wir eine Funktion in der generischen Erweiterung, so wissen wir nicht, ob diese Funktion auch im Grundmodell zu finden ist. Wir können jedoch für jeden einzelnen Funktionswert eine abzählbare Menge an möglichen Werten im Grundmodell finden.

Lemma 4.11. ([2] S. 264) Sei $\mathbb{P}$ eine Bedingungsmenge, ($\mathbb{P}$ hat die ccc)^M, und $A, B \in M$. Sei G $\mathbb{P}$-generisch über M und $f \in M[G]$ so, dass $f : A \to B$. Dann gibt es eine Funktion $F \in M$ so, dass $F : A \to \mathcal{P}(B)$. Außerdem gilt für alle $a \in A$ ist $f(a) \in F(a)$ und $(|F(a)| \leq \aleph_0)^M$.

Beweis. Sei $\mathring{\mathrm{f}} \in M^\mathbb{P}$ ein Name so, dass $\mathring{\mathrm{f}}_G$=f. Dann ist durch '$\mathring{\mathrm{f}}$: $\check{\mathrm{A}} \to \check{\mathrm{B}}$' ein Satz in $\mathcal{FL}_\mathbb{P} \cap M$ gegeben, der in M[G] wahr ist. Daher gibt es laut dem Wahrheitslemma ein $p \in G$ so, dass $p \Vdash \mathring{\mathrm{f}}$: $\check{\mathrm{A}} \to \check{\mathrm{B}}$. Nun definieren wir $F : A \to \mathcal{P}(B)$ durch $F(a) = \{b \in B : \exists q \leq p$ so, dass $q \Vdash \mathring{\mathrm{f}}(\check{\mathrm{a}}) = (\check{\mathrm{b}})\}$. Laut dem Definierbarkeitslemma ist $F \in M$.
Nun wollen wir zeigen, dass auch wirklich jedes $f(a) \in F(a)$ ist. Sei also $b = f(a)$, dann gilt $M[G] \models \mathring{\mathrm{f}}(\check{\mathrm{a}}) = \check{\mathrm{b}}$ und daher gibt es ein $q \leq p \in G$ so, dass
$q \Vdash \mathring{\mathrm{f}}(\check{\mathrm{a}}) = (\check{\mathrm{b}})$. Dann ist $b \in F(a)$.
Zuletzt wollen wir noch beweisen, dass wirklich für jedes F(a) gilt, dass

$(|F(a)| \leq \aleph_0)^M$. Wählen wir also für jedes $b \in F(a)$ ein $q_b \leq p$ so, dass $q \Vdash \mathring{f}(\check{a}) = \check{b}$. Dann sind die q_b paarweise inkompatibel, da wenn es $b \neq c$ und ein $r \leq q_b$ und $r \leq q_c$ gibt, so finden wir einen generischen Filter H, der r enthält und somit gilt: $M[H] \models \mathring{f}: \check{A} \to \check{B} \wedge \mathring{f}(\check{a}) = (\check{b}) \wedge \mathring{f}(\check{a}) = (\check{c}) \wedge \check{b} \neq \check{c}$, was ein Widerspruch ist. Außerdem dürfen wir laut dem Definierbarkeitslemma und AC in M annehmen, dass die Funktion $b \mapsto q_b$ in M liegt. Wir verwenden nun, dass aus $b \neq c$ folgt, dass q_b und q_c inkompatibel sind, und die ccc. Somit erhalten wir, dass M glaubt, $F(a)$ sei eine abzählbare Menge. $\square$

Somit haben wir gezeigt, dass insbesondere ω_2 als zweite überabzählbare Kardinalzahl in der generischen Erweiterung erhalten bleibt. Gemeinsam mit den Resultaten über f_G und den Komponentenfunktionen h_α erhalten wir ein Modell, in dem $ZFC + \neg CH$ gilt.
Paul Cohen schaffte es durch seine Werke, die Frage nach der Richtigkeit und der Beweisbarkeit der Kontinuumshypothese rund ein Jahrhundert nach deren Formulierung zu beantworten. Die Forcing-Methode hat es uns ermöglicht zu zeigen, dass die Negation der Kontinuumshypothese zu ZFC relativ widerspruchsfrei ist.

Literatur

[1] O. Deiser. *Einführung in die Mengenlehre: die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo.* Springer-Lehrbuch. Springer, 2004. URL: `https://books.google.at/books?id=RnHPwAEACAAJ`.

[2] K. Kunen. *Set Theory.* Studies in logic. College Publications, 2011. URL: `https://books.google.at/books?id=Zn8ppwAACAAJ`.

[3] R. Schindler. *Set Theory: Exploring Independence and Truth.* Universitext. Springer International Publishing, 2014. URL: `https://books.google.at/books?id=5TcqBAAAQBAJ`.