UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK SS 2017

VERA FISCHER

Die Gesamtnote ergibt sich je zur Hälfte aus der Teilnote Kreuzerlliste und der Teilnote Zwischentest, gerundet auf "freundlichen" Weise. Für eine positive Benotung müssen beide Teilnoten positiv sein. Es besteht Anwesenheitspflicht, ein zweimaliges unentschuldigtes Fehlen ist gestattet.

Teilnote Kreuzerlliste:
60% - 69% - 4
70% - 79% - 3
80% - 89% - 2
90%-100% - 1

Die Übungen finden Donnerstags um 10:45Uhr in HS11 statt. Die erste Übung ist am 02.03.2017. Der voraussichtliche Termin für den Zwischentest ist 06.04.2017.

06.03.2017: Das erste Übungsblatt ist ab sofort über Moodle erreichbar. Bitte tragen Sie Ihre Antworten über Moodle elektronisch ein. Die Abgabefrist ist Donnerstag, 09.03.2017, 9:00 Uhr.

04.04.2017: Die Probeklausur findet am 06.04. ab 9:35 Uhr in HS11 und HS7 statt. Die Raumaufteilung ist wie folgt: A - J HS7 und K - Z HS11. Die Testdauer ist 60 Minuten. Bitte kommen Sie pünktlich an und vergessen Sie den Lichtbildausweis nicht!

Am 29.06.2017 von 9:00 11:00 Uhr (in HS 11 und HS 15) finded die Abschlusklausur (für die Vorlesung) statt. Die Anmeldung zur Klausur endet am 27.06. um 23:59 Uhr.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

**UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK:
ÜBUNGSBLATT 1, 03.03.2017**

Aufgabe 1. Zeigen Sie dass jede Formel in der aussagenlogischen Sprache mit Alphabet

$$\{\ (\ ,\ )\ ,\ \neg\ ,\ \wedge\ \} \cup \mathrm{Var}$$

gleichviele Rechtsklammern wie Linksklammern hat.

Notationen&Definitionen:

A. Funktionen $\beta : \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ nennen wir auch *Belegungen*. Jede Belegung β lässt sich eindeutig auf der Menge $\mathcal{F}^*$ aller Formeln der Sprache mit Alphabet

$$\{\ (\ ,\ )\ ,\ \neg\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \to\ ,\ \leftrightarrow\ \} \cup \mathrm{Var}$$

erweitern, so dass:
   (a) für jede Formel $\phi \in \mathcal{F}^*$, $\beta(\neg\phi) = 1$ gdw $\beta(\phi) = 0$;
   (b) für alle Formeln ϕ, ψ in $\mathcal{F}^*$:
      (i) $\beta((\phi \wedge \psi)) = 1$ gdw $\beta(\phi) = 1$ und $\beta(\psi) = 1$;
      (ii) $\beta((\phi \vee \psi)) = 1$ gdw $\beta(\phi) = 1$ oder $\beta(\psi) = 1$;
      (iii) $\beta((\phi \to \psi)) = 1$ gdw $\beta(\phi) = 0$ oder $\beta(\psi) = 1$;
      (iv) $\beta((\phi \leftrightarrow \psi)) = 1$ gdw $\beta(\phi) = \beta(\psi)$.

B. Wir nennen eine Formel $\phi \in \mathcal{F}^*$ *allgemeingültig*, wenn für jede Belegung β, $\beta(\phi) = 1$.

C. Zwei Formeln ϕ, ψ in $\mathcal{F}^*$ heißen *aussagenlogisch äquivalent*, wenn $\beta(\phi) = \beta(\psi)$ für jede Belegung β.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln (de Morgansche Gesetze) allgemeingültig sind:

(1) $(\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$
(2) $(\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi))$

Aufgabe 3. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig und welche nicht? Beweisen Sie ihre Antwort.

(1) $((X \to Z) \to ((Y \to Z) \to ((X \vee Y) \to Z)))$
(2) $((X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to \neg X))$
(3) $((X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X))$
(4) $(\neg X \to (X \to Y))$
(5) $(\neg X \to (Y \to X))$

Aufgabe 4. Betrachten Sie die folgende Situation:

Rose geht zur Party nur, wenn Johannes auch dabei ist. Johannes geht nur, wenn Peter oder Lily dabei ist. Peter kann nicht. Lily kann auch nicht.

Benutzen Sie Aussagenlogik um die folgende Frage zu beantworten: Muss dann Rose oder Johannes unbedingt dort sein?

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK: ÜBUNGSBLATT 2, 10.03.2017

Aufgabe 1. (Eindeutige Lesbarkeit von Termen)

(1) Zeigen Sie, dass kein $\mathcal{L}$-Term ein echtes Anfangsstück eines anderen $\mathcal{L}$-Terms ist.

(2) Sei $t = ft_1 \cdots t_n$ ein $\mathcal{L}$-Term, wobei f ein n-stelliges Funktionszeichen ist und $t_1, \cdots, t_n$ $\mathcal{L}$-Terme sind. Beweisen Sie, dass $f, t_1, \cdots, t_n$ eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache, wobei $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ endlich sind. Sei A eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass es nur endlich viele $\mathcal{L}$-Strukturen mit Universum A gibt.

Aufgabe 3. Geben Sie eine Sprache mit unendlich vielen nicht isomorphen Strukturen an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Notationen&Definitionen:

A. Sei $f : A^n \to A$ eine Funktion und sei B eine Teilmenge von A. Mit $f \restriction B^n$ bezeichnen wir die Funktion mit Definitionsbereich B^n, wobei für $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in B^n$, $(F \restriction B)(\bar{a}) = F(\bar{a})$ ist. Die Funktion $F \restriction B^n$ nennen wir *die Einschränkung von F auf B^n*.

B. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Unterstruktur* von $\mathfrak{B}$ (schreibe $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) wenn $A \subseteq B$ und
   (a) für jedes n-stellige Relationssymbol R in $\mathcal{L}$ ist $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
   (b) für jedes n-stellige Funktionssymbol f in $\mathcal{L}$ ist $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction A^n$
   (c) für jede Konstante c in $\mathcal{L}$ ist $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Aufgabe 4. Sei F ein zweistelliges Funktionssymbol, R ein zweistelliges Relationssymbol. Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$, wobei $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{F\}$, $\mathcal{R} = \{R\}$. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Sei $\mathbb{O}$ die Menge der ungerade natürlichen Zahlen, $\mathbb{E}$ die Menge der gerade natürlichen Zahlen, G die übliche Addition auf $\mathbb{N}$, R die Relation kleiner-gleich auf $\mathbb{N}$.

(1) Ist $(\mathbb{E}, \{G \restriction \mathbb{E} \times \mathbb{E}\}, \{R \cap \mathbb{E} \times \mathbb{E}\})$ eine $\mathcal{L}$-Struktur?

(2) Ist $(\mathbb{O}, \{G \restriction \mathbb{O} \times \mathbb{O}\}, \{R \cap \mathbb{O} \times \mathbb{O}\})$ eine Unterstruktur von $(\mathbb{N}, \{G\}, \{R\})$?

Aufgabe 5. Sei F ein einstelliges Funktionssymbol. Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L} = (\emptyset, \{F\}, \emptyset)$ und die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$ mit Universum $\mathbb{N}$, wobei $F^{\mathfrak{B}}(n) = 2017 * n$ für alle n. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ mit Univerum A. Zeigen Sie, dass wenn $\exists b \in A (b \neq 0)$, dann A unendlich ist.

Aufgabe 6. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln über dem Alphabet

$$\{\ (\ ,\ )\ ,\ \neg\ ,\ \wedge\ \} \cup \mathrm{Var}$$

und sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ eine Relation, wobei $(\phi, \psi) \in \mathcal{R}$ gdw. ϕ und ψ aussagenlogisch äquivalent sind. Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}$ ist, d.h. dass $\mathcal{R}$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 3, 17.03.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}_N = (\{\underline{0}\}, \{S, \underline{+}, \underline{\cdot}\}, \{\underline{\leq}\})$ die Sprache der natürlichen Zahlen. Sei $\mathfrak{N}$ die $\mathcal{L}_N$-Struktur mit Universum $\mathbb{N}$. Sei β eine Belegung, wobei $\beta(v_n) = 2n$ für alle $n \geq 0$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

(1) $\mathfrak{N} \models (v_1 \underline{\cdot} (v_1 \underline{+} v_1)) \doteq v_4[\beta]$
(2) $\mathfrak{N} \models \forall v_0 \exists v_1 v_0 \underline{\leq} v_1[\beta]$
(3) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 \underline{+} v_0) \doteq v_1[\beta]$
(4) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 \underline{\cdot} v_0) \doteq v_1[\beta]$
(5) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 \underline{\cdot} v_1) \doteq v_1[\beta]$
(6) $\mathfrak{N} \models \forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 \underline{\leq} v_2 \wedge v_2 \underline{\leq} v_1)[\beta]$

Aufgabe 2. Eine Formel, die keine Quantoren enthält heißt *quantorenfrei*. Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und sei β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) für jeden $\mathcal{L}$-Term t, $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{B}}[\beta]$
(2) für jede quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formel φ, $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta]$.

Hinweis: Benutzen Sie Induktion über den Aufbau der $\mathcal{L}$-Terme und $\mathcal{L}$-Formeln.

Aufgabe 3. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A. Eine Teilmenge X von A^n heißt *definierbar in* $\mathfrak{A}$ wenn es eine Formel $\varphi = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ gibt, so dass

$$X = \{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]\}.$$

Zeigen Sie, dass wenn $X \subseteq A^n$ definierbar und π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}$ ist, dann $\{\pi(a) : a \in X\} = X$.

Aufgabe 5. Sei $\mathcal{L}_0 = (\{\underline{0}\}, \{\underline{+}, \underline{\cdot}\}, \emptyset)$, $\mathcal{L}_1 = (\{\underline{0}\}, \{\underline{+}\}, \emptyset)$ Sprachen. Betrachten Sie die $\mathcal{L}_0$-Struktur $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{L}_1$-Struktur $\mathfrak{B}$, wobei $A = B = \mathbb{R}$ und $\underline{+}^{\mathfrak{A}}, \underline{+}^{\mathfrak{B}}, \underline{0}^{\mathfrak{A}}, \underline{0}^{\mathfrak{B}}, \underline{\cdot}^{\mathfrak{A}}$ die üblichen Objekte auf $\mathbb{R}$ sind. Sei

$$X := \{(r_0, r_1) \in \mathbb{R}^2 : r_0 < r_1\},$$

d.h. X ist die Kleiner-Beziehung auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(1) X definierbar in $\mathfrak{A}$ ist,
(2) X nicht definierbar in $\mathfrak{B}$ ist.

Hinweis: Um zu zeigen dass X in $\mathfrak{B}$ nicht definierbar ist, betrachten Sie einen geigneten Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf sich selbst.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK: ÜBUNGSBLATT 4, 24.03.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und φ, ψ $\mathcal{L}$-Formeln. Zeigen Sie:

(1) $\vdash_{\mathcal{L}} \forall x\varphi \to \exists x\varphi$
(2) $\vdash_{\mathcal{L}} \forall x(\varphi \wedge \psi) \to (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$

Aufgabe 2. Sei K und H zwei einstellige Relationssymbole in $\mathcal{L}$. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig und welche nicht? Beweisen Sie ihre Antwort.

(1) $\exists x(Hx \to \forall yHy)$
(2) $\forall xHx \vee \forall xKx \to \forall x(Hx \vee Kx)$
(3) $\exists xHx \wedge \exists xKx \to \exists x(Hx \wedge Kx)$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $\phi_1, \cdots, \phi_n$ beweisbare $\mathcal{L}$-Formeln sind und $(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \psi$ beweisbar ist, dann ist auch ψ beweisbar.
(2) ($\forall$-*Quantorenaxiome*) Wenn ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel ist, t ein $\mathcal{L}$-Term und v eine Variable, die frei für t in ϕ ist, dann ist $\forall v\phi \to \phi_v^t$ beweisbar.
(3) ($\forall$-*Einführung*) Wenn ϕ und ψ $\mathcal{L}$-Formeln sind und v eine Variable ist, die nicht frei in ϕ vorkommt, dann ist mit $\phi \to \psi$ auch $\phi \to \forall v\psi$ beweisbar.

Hinweis: Benutzen Sie geignete Tautologien.

KURT GÖDEL RESEARCH CENTER, UNIVERSITY OF VIENNA, WÄHRINGERSTRASSE 25, 1090 VIENNA, AUSTRIA
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 5, 06.04.2017

Kompaktheitssatz

Aufgabe 1.
(1) Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und T eine $\mathcal{L}$-Theorie. Angenommen, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ von T, dessen Universum wenigstens n paarweise verschiedene Elemente enthält. Zeigen Sie, dass es ein unendliches Modell von T gibt.
(2) Zeigen Sie, dass keine Theorie T für eine geeignete Sprache $\mathcal{L}$ existiert, deren Modelle genau die endlichen Gruppen sind.
Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine geeignete Formel, welche sicher stellt, dass das Universum eines Modells dieser Formel wenigstens n Elemente hat.

Henkintheorien

Aufgabe 2. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, so dass:
(a) T ist eine Henkintheorie mit Konstantenmenge C;
(b) Für je zwei Konstanten c, d in C entweder $T \vdash c \doteq d$ oder $T \vdash \neg c \doteq d$;
(c) Es gibt zwei Konstanten a, b in C mit $T \vdash \neg a \doteq b$.
Zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{L}$-Aussage φ,

$$T \vdash \varphi \text{ oder } T \vdash \neg\varphi.$$

Hinweis: Sei φ eine $\mathcal{L}$-Aussage. Betrachten Sie die Formel

$$\psi(x) = (\varphi \wedge x \doteq a) \vee (\neg\varphi \wedge x \doteq b).$$

Zeigen Sie, mit der Hilfe des Vollständigkeitssatzes, dass $T \vdash \exists x \psi(x)$. Benutzen Sie dann die Voraussetzung, dass T eine Henkintheorie ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine $\mathcal{L}$-Theorie T existieren, so dass T die Voraussetzungen (a) und (b) aus Aufgabe 2 erfüllt und es eine $\mathcal{L}$-Aussage φ gibt mit

$$T \nvdash \varphi \text{ und } T \nvdash \neg\varphi.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine Theorie T mit der folgenden Eigenschaft: Wenn $\mathfrak{A} \vDash T$, dann enthält das Universum von $\mathfrak{A}$ genau ein einziges Element. Es genügt z.B., dass die Formel $\forall x \forall y x \doteq y$ ein Element von T ist.

Aufgabe 4. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, so dass:
(a*) T ist eine Henkintheorie mit Konstantenmenge C;
(b*) Für je zwei Konstanten c, d in C entweder $T \vdash c \doteq d$ oder $T \vdash \neg c \doteq d$;
(c*) $T \nvdash \forall x \forall y x \doteq y$.
Zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{L}$-Aussage φ, $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass T Voraussetzung (c) aus Aufgabe 2 erfüllt.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 6, 28.04.2017

Peano-Arithmetik

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Assoziativität von $+$ in PA. D.h. zeigen Sie, dass in PA

$$\forall m \forall n \forall q \; (m+q)+n = m+(q+n).$$

Hinweis: Benutzen Sie Induktion über n.

Kompaktheitssatz

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{L}_N = \{\{\underline{0}\}, \{S, +, \cdot\}, \{<\}\}$ die Sprache der Arithmetik und $\mathfrak{N}$ das standard Modell von $\mathcal{L}_N$. Sei c eine neue Konstante und sei $\mathcal{L}$ die Sprache $\mathcal{L}_N \cup \{c\}$. Ferner, sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen und sei

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) := \{\varphi \mid \varphi \; \mathcal{L}_N\text{-Aussage}, \; \mathfrak{N} \models \varphi\}.$$

(1) Betrachten Sie die folgende Menge Γ von $\mathcal{L}$-Aussagen

$$\Gamma := \{\underline{0} < c, S\underline{0} < c, SS\underline{0} < c, \cdots\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma$ konsistent ist.

(2) Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma$. Zeigen Sie dass $\mathfrak{N}$ und

$$\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}_N = (\{\underline{0}^{\mathfrak{A}}\}, \{S^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}\}, \{<^{\mathfrak{A}}\})$$

nicht isomorph sind.

(3) Sei $A \subseteq P$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $S^n\underline{0}$ eine Abkürzung von $S \cdots S\underline{0}$, wobei das Symbol S n-mal auftritt, und sei $\Gamma(A)$ die folgende Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen:

$$\{\exists z \; S^p\underline{0} \cdot z \doteq c \mid p \in A\} \cup \{\neg \exists z S^p\underline{0} \cdot z \doteq c \mid p \in P \backslash A\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma(A)$ konsistent ist.

Aufgabe 3. (Satz von Löwenheim-Skolem aufwärts) Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, die ein unendliches Modell hat. Zeigen Sie, dass es zu jeder Menge A ein Modell $\mathfrak{M}_A$ von T gibt, dessen Universum M_A mindestens so viele Elemente wie A enthält (d.h. es gibt eine injektive Abbildung von A nach M_A.)

Hinweis: Betrachten Sie die Theorie

$$T' = T \cup \{\neg c_a \doteq c_b : a, b \in A, a \neq b\},$$

wobei $C = \{c_a : a \in A\}$ eine geeignete Menge von neuen Konstanten ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Für jede konsistente Menge Φ von $\mathcal{L}$-Aussagen, sei $\mathfrak{A}_\Phi$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Sei

$$\Sigma := \{\mathfrak{A}_\Phi \mid \Phi \text{ konsistente Menge von } \mathcal{L}\text{-Aussagen}\}.$$

Ferner, für jede $\mathcal{L}$-Aussage φ sei $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$. Zeigen Sie, dass:

(1) die Menge $\{X_\varphi \mid \varphi \; \mathcal{L}\text{-Aussage}\}$ die Basis einer Topologie auf Σ bildet;
(2) jede Menge X_φ abgeschlossen ist;
(3) jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Hinweis zu (3): Betrachten Sie eine beliebige Überdeckung $\{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}$ von Σ und zeigen Sie, dass es eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ gibt, so dass $\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$ nicht konsistent ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 7, 04.05.2017

Aufgabe 1. (Kriterium von Tarksi-Vaught) Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A. Eine Unterstruktur $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ mit Universum C heißt *elementar* (bezeichnet $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{A}$) , wenn

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[c_1, \cdots, c_n] \iff \mathfrak{C} \vDash \varphi[c_1, \cdots, c_n]$$

für alle $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ und $c_1, \cdots, c_n$ in C.

Sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{A}$ gdw. für alle $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ und alle $d_1, \cdots, d_n$ im Universum C von $\mathfrak{C}$, wenn es ein a im Universum A von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, d_1, \cdots, d_n]$ gibt, dann gibt es auch ein $c \in C$ mit $\mathfrak{A} \vDash \varphi[c, d_1, \cdots, d_n]$.

Aufgabe 2. (Satz von Löwenheim-Skolem abwärts) Sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige Struktur für eine abzählbare Sprache $\mathcal{L}$ mit unendlichenm Universum B und sei A_0 eine abzählbare Teilmenge von B. Sei $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller $\exists$-Formeln der Sprache $\mathcal{L}$, d.h. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\varphi_i = \exists y \psi_i(\vec{x}, y)$ wobei $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_{n_i})$ die freien Variablen von φ_i bezeichnet. Für jedes $i \in \mathbb{N}$, sei $F_i : B^{n_i} \to B$ eine Abbildung, die wie folgt definiert ist:

$$F_i(\vec{a}) = \begin{cases} b, & \text{wenn } \exists b \in B(\mathfrak{B} \vDash \psi_i[\vec{a}, b]) \text{ wenn es mehr als ein solches } b \text{ gibt, dann wählen wir eins} \\ b_0, & \text{sonst, wobei } b_0 \text{ ein beliebiges fixiertes Element von } B \text{ ist.} \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass es eine abzählbare Menge $A \subseteq B$ gibt, so dass $A_0 \subseteq A$ ist und $\forall i \in \mathbb{N} \forall \vec{a} \in A^{n_i}(F_i(\vec{a}) \in A)$. Die Menge A wird **Skolem-Hülle** von A_0 genannt und wird mit $\mathfrak{hull}_{\mathfrak{B}}(A_0)$ bezeichnet.

(2) Zeigen Sie mit der Hilfe des Tarksi-Vaught Kriteriums, dass $\mathfrak{hull}_{\mathfrak{B}}(A_0)$ das Universum einer abzählbaren, elementaren Substruktur $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \cdots$ eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen. Sei $\mathfrak{B}$ die Struktur mit Universum $\bigcup_n A_n$, wobei auch

(1) für jedes k-stellige Relationssymbol R, $R^{\mathfrak{B}} := \bigcup\{R^{\mathfrak{A}_n} : n \in \mathbb{N}\}$,
(2) für jedes k-stellige Funktionssymbol f, $f^{\mathfrak{B}} := \bigcup\{f^{\mathfrak{A}_n} : n \in \mathbb{N}\}$, und
(3) für jede Konstante c, $c^{\mathfrak{B}} := c^{\mathfrak{A}_0}$.

$\mathfrak{B}$ heisst *Limes* von $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wird mit $\lim_n \mathfrak{A}_n$ bezeichnet.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}$ wohldefiniert ist.
(2) Sei $(\mathfrak{A}_n)_n$ eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen so dass $\mathfrak{A}_n \preceq \mathfrak{A}_{n+1}$ für jedes n. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_n \preceq \lim_n \mathfrak{A}_n$ für alle n.

Aufgabe 4. Finden Sie eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so dass $\mathfrak{A}_n \equiv \mathfrak{A}_{n+1}$ für alle n, aber $\mathfrak{A}_n \not\equiv \lim_n \mathfrak{A}_n$.
Hinweis: Wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, dann auch $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 8, 12.05.2017

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit hilfe der ZFC-Axiome:

(1) Für alle a, b, c, d gilt: $(a, b) = (c, d)$ genau dann wenn $a = c$ und $b = d$.
(2) Sind $a_1, \cdots, a_n$ Mengen, so gibt es eine Menge b, die genau $a_1, \cdots, a_n$ als Elemente enthält.
(3) Die Mengen $\{\}$, $\{\{\}\}$, $\{\{\{\}\}\}$, $\cdots$ sind paarweise verschieden.
(4) Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Menge, die genau n Elemente enthält.
(5) Es gibt keine Mengen a, b mit $a \in b$ und $b \in a$.

Aufgabe 2. Eine Menge α heißt eine *Ordinalzahl* gdw.

- für alle $x \in \alpha$ gilt, dass $x \subset \alpha$, und
- die Relation $\in \restriction \alpha = \{(x, y) \in \alpha \times \alpha : x \in y\}$ eine lineare Ordnung auf α ist.

Zeigen Sie:

(1) $\emptyset$ ist eine Ordinalzahl.
(2) Wenn α eine Ordinalzahl ist, dann ist auch $\alpha + 1$ eine Ordinalzahl.
(3) Jedes $n \in \omega$ ist eine Ordinalzahl.
(4) ω is eine Ordinalzahl.
(5) Sei A eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist auch $\bigcup A$ eine Ordinalzahl.

Aufgabe 3. Für jede natürliche Zahl n sei A_n eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass

(1) $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar ist.
(2) $A_1 \times A_2 \times A_3$ abzählbar ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 9, 19.05.2017

Aufgabe 1. Aufgabe 2 von Übungsblatt 8 wird noch einmal ausführlich diskutiert.

Aufgabe 2. Seien x und y Mengen. Eine Menge $f \subseteq x \times y$ ist eine *Funktion* von x nach y gdw. für jedes $a \in x$ genau ein $b \in y$ existiert, so dass $(a, b) \in f$. Zeigen Sie in ZFC die Existenz der folgenden Mengen:

(1) $x \cup y$
(2) $x \times y$
(3) ${}^{x}y = \{f : f \text{ ist eine Funktion von } x \text{ nach } y\}$

Aufgabe 3. Eine unendliche Menge A heißt *überabzählbar* gdw. es keine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A gibt. Beweisen Sie, dass das offene Intervall $(0, 1)$ von reellen Zahlen überabzählbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine Bijektion von der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ auf ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ gibt und außerdem, dass es eine Injektion von ${}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ nach $(0, 1)$ gibt.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 10, 01.06.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}$ eine beliebige Sprache und sei T eine widerspruchsfreie Theorie. Zeigen Sie, dass T eine vollständige Erweiterung hat.
Hinweis: Der Fall in dem $\mathcal{L}$ abzählbar ist, wurde in der Vorlesung gemacht.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Hilfe des Auswahlaxioms: Eine lineare Ordnung $<$ auf einer Menge M ist genau dann eine Wohlordnung, wenn es keine Folge $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ von Elementen von M mit $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 3. Für eine Menge x definieren wir: $\bigcup^0 x = x$, $\bigcup^1 x = \bigcup x$ und $\bigcup^{n+1} x = \bigcup \bigcup^n x$. Ferner, sei $\operatorname{trcl}(x) = \bigcup \{\bigcup^n x : n \in \omega\}$. Wir sagen, dass x *transitiv* ist, wenn $\forall y (y \in x \to y \subseteq x)$. Seien x, y beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass:

(1) $x \subseteq \operatorname{trcl}(x)$;
(2) $\operatorname{trcl}(x)$ transitiv ist;
(3) wenn $y \subseteq x$ ist und x transitiv ist, dann auch $\operatorname{trcl}(y) \subseteq x$;
(4) wenn $y \in x$, dann $\operatorname{trcl}(y) \subseteq \operatorname{trcl}(x)$;
(5) wenn x transitiv ist, dann $x = \operatorname{trcl}(x)$.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 11, 12.06.2017

Aufgabe 1. Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit der folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ un $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
(2) wenn $X \in \mathcal{F}$ und $Y \in \mathcal{F}$, dann $X \cap Y \in \mathcal{F}$;
(3) wenn $X \in \mathcal{F}$ ist und $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $X \subseteq Y$, dann auch $Y \in \mathcal{F}$.

Ein Filter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$ heißt ein *Ultrafilter*, wenn für jede unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ entweder $A \in \mathcal{U}$ oder $\mathbb{N}\backslash A \in \mathcal{U}$. Beweisen Sie, mit Hilfe des Lemmas von Zorn, dass es für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{N}$, einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ gibt.

Aufgabe 2. Sei α und β Ordinalzahlen mit $\alpha \subseteq \beta$ und $\alpha \neq \beta$. Zeigen Sie, dass $\alpha \in \beta$.
Hinweis: Betrachten Sie $\gamma := \min\{\xi : \xi \in (\beta\backslash\alpha)\}$ und zeigen Sie, dass $\gamma = \alpha$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass für je zwei Ordinalzahlen α, β mit $\alpha \neq \beta$ entweder $\alpha \subset \beta$ oder $\beta \subset \alpha$.
Hinweis: Angenommen, es existieren α, β mit $\neg(\alpha \subseteq \beta) \wedge \neg(\beta \subseteq \alpha)$, betrachten Sie die kleinste Ordinalzahl $\alpha_0 \in \alpha \cup \{\alpha\}$, sodass es ein β_0 mit $\neg(\alpha_0 \subseteq \beta_0) \wedge \neg(\beta_0 \subseteq \alpha_0)$ gibt. Zeigen Sie, dass $\alpha_0 \cup \beta_0$ eine Ordinalzahl ist und verwenden Sie Aufgabe 2 um einen Widerspruch zu erreichen.

Aufgabe 4. Sei X eine Menge von Ordinalzahlen. Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ auch eine Ordinalzahl ist.

Bemerkung: Aus Aufgaben 2 und 3 folgt es, dass je zwei Ordinalzahlen vergleichbar sind. D.h. für je zwei Ordinalzahlen α, β gilt das Folgende: $\alpha = \beta$, oder $\alpha \in \beta$, oder $\beta \in \alpha$. Die Sammlung aller Ordinalzahlen ist aber keine Ordinalzahl, weil sie keine Menge ist. *Beweis:* Angenommen X ist die Menge aller Ordinalzahlen, betrachten Sie $\gamma = \bigcup X$. Laut Aufgabe 4 ist γ eine Ordinalzahl. Daraus folgt aber, dass $\gamma \in X$ und daher, dass $\gamma \in \gamma$. Widerspruch! $\square$.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK: BONUS AUFGABEN 1, 24.03.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A, sei $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum B und sei $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Bemerken Sie, dass für jede Belegung β für $\mathfrak{A}$, $\pi \circ \beta$ eine Belegung für $\mathfrak{B}$ ist.

(1) Zeigen Sie über den Aufbau der Terme, dass für jeden $\mathcal{L}$-Term t und jede Belegung β für $\mathfrak{A}$,
$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi \circ \beta].$$
(2) Zeigen Sie über den Aufbau der Formeln, dass für jede $\mathcal{L}$-Formel ϕ und jede Belegung β für $\mathfrak{A}$,
$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \phi[\pi \circ \beta].$$

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A, sei $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum B und sei $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Benutzen Sie Aufgabe 1 um die folgenden Aussagen zu begründen:

(1) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind elementar äquivalent.
(2) Sei $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Zeigen Sie, dass für alle $a_1, \cdots, a_n$ in A,
$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n] \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \cdots, \pi(a_n)].$$

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A, $\phi = \phi(x_1, \cdots, x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel und sei
$$X = \{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]\}$$
(d.h. X ist durch ϕ definierbar). Zeigen Sie, dass wenn π ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$ ist (d.h. wenn π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}$ ist), dann
$$\{(\pi(a_1), \cdots, \pi(a_n)) : \bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in X\} = X.$$

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): BONUS AUFGABE, 12.05.2017

Bonus Aufgabe. Sei A eine Menge und $B = \{x : x \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A.

(1) Sei f eine Abbildung von A nach B. Zeigen Sie, dass es kein $a \in A$ gibt mit $f(a) = \Delta$, wobei
$$\Delta = \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

(2) Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung von A nach B gibt.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): BONUS AUFGABE 3, 23.05.2017

Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

Satz: Sei Φ eine abzählbare Menge von aussagenlogischen Formeln. Die Menge Φ ist erfülbar gdw. jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

Definition:

(1) Eine *Karte* ist ein Paar $\langle C, N \rangle$, wobei C eine Menge ist, deren Elemente als Länder interpretiert werden und N eine Menge von Paaren $\{c, c'\}$ ist, die als angrenzende Länder interpretiert werden. Wir sagen, dass $\langle C, N \rangle$ eine unendliche Karte ist, wenn die Menge C unendlich ist.
(2) Eine *Teilkarte* von $\langle C, N \rangle$ ist eine Karte $\langle C', N' \rangle$, wobei $C' \subseteq C$ und $N' \subseteq N$.
(3) Eine Karte kann mit vier Farben eingefärbt werden, wenn es eine Abbildung $F : C \to \{1, 2, 3, 4\}$ gibt, so dass $F(c) \neq F(d)$ wenn $\{c, d\} \in N$. (Wir sagen, dass angrenzende Länder verschiedene Farben haben.)

Aufgabe 1 (Der Vier-Farben-Satz) Zeigen Sie, dass eine unendliche Karte $\langle C, N \rangle$ genau dann mit vier Farben eingefärbt werden kann, wenn jede endliche Teilkarte von $\langle C, N \rangle$ mit vier Farben eingefärbt werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie eine unendliche Menge von aussagenlogischen Variablen $\{A_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ mit der beabsichtigten Interpretation "das Land c_i hat die Farbe j". Betrachten Sie die Menge Φ aller aussagenlogischen Formeln der folgenden Form:

(1) $A_{i,j} \to \neg A_{i',j}$ und $A_{i',j} \to \neg A_{i,j}$, wobei $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $\{c_j, c_{j'}\} \in N$;
(2) $A_{i,1} \vee A_{i,2} \vee A_{i,3} \vee A_{i,4}$ für $i \in \mathbb{N}$;
(3) $A_{i,j} \to \neg A_{i,j'}$ für $j' \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass aus der Annahme, dass jede endliche Teilkarte von $\langle C, N \rangle$ mit vier Farben eingefärbt werden kann, folgt, dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Nun, betrachten Sie eine aussagenlogische Belegung β mit $\beta \vDash \Phi$. Zeigen Sie, dass β eine Abbildung $F : C \to \{1, 2, 3, 4\}$ festlegt, welche die Behauptung bezeugt, dass $\langle C, N \rangle$ mit vier Farben eingefärbt werden kann.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

AUSGEWÄHLTE LÖSUNGEN

Lösung von Aufgabe 2(ÜB 5).

Zuerst zeigen wir Folgendes:

Behauptung 1. Die Formel $\exists x \psi(x)$ ist allgemeingültig.
Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Struktur. Entweder $\mathfrak{A} \models \varphi$ oder $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.
Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann $\mathfrak{A} \models \psi[a_0]$ wobei $a_0 = a^{\mathfrak{A}}$ (d.h. $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$ mit Zeuge a_0).
Wenn $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, dann $\mathfrak{A} \models \psi[b_0]$ wobei $b_0 = b^{\mathfrak{A}}$ (d.h. $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$ mit Zeuge b_0). $\square$

Da T eine Henkin Theorie ist, gibt es eine Konstante c, so dass die Formel

$$\exists x \psi(x) \to \psi(c)$$

ein Element von T ist.

Behauptung 2. $T \models \psi(c)$.
Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell von T. Dann gilt insbesondere $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x) \to \psi(c)$. Mit Hilfe von Behauptung 1 erhalten wir $\mathfrak{A} \models \psi(c)$. $\square$

Behauptung 3. $T \models \neg c \doteq a$ oder $T \models \neg c \doteq b$.
Beweis: Wegen Bedingung (b) gilt $T \models c \doteq a$ oder $T \models \neg c \doteq a$. Im zweiten Fall gilt die Behauptung. Angenommen $T \models c \doteq a$. Dann ergibt Bedingung (c) $T \models \neg c \doteq b$. $\square$

Nun sind wir vorbereitet den Beweis zu vollständigen.
Angenommen $T \models \neg c \doteq a$. Jetzt betrachten wir ein beliebiges Modell $\mathfrak{A}$ von T. Da $\mathfrak{A} \models \psi(c)$, erhalten wir $\mathfrak{A} \models \varphi$ und nach dem Vollständigkeitssatz $T \vdash \varphi$.
Sonst gilt $T \models \neg c \doteq b$ und ähnlicherweise erhält man, dass $T \vdash \neg\varphi$. $\square_{A2(Blatt5)}$

Date: May 5, 2017.

Lösungen von Aufgabe 4.2 und 4.3 (ÜB 6).

(2) Sei φ eine beliebige $\mathcal{L}$-Aussage. Dann

$$\Sigma \backslash X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma : \mathfrak{A} \not\models \varphi\} = \{\mathfrak{A} \in \Sigma : \mathfrak{A} \models \neg\varphi\} = X_{\neg\varphi}.$$

(3) Sei Φ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen mit der Eigenschaft, dass $\{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}$ eine Überdeckung von Σ ist. D.h.

$$\Sigma = \bigcup\{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}.$$

Jetzt betrachten wir die Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Wenn Ψ konsistent ist, dann existiert ein Modell $\mathfrak{A}_\Psi$ von Ψ. Daraus folgt aber, dass

$$\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma = \bigcup\{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}.$$

D.h. es gibt eine Aussage $\varphi_0 \in \Phi$ mit $\mathfrak{A}_\Psi \in X_{\varphi_0}$. Dann folgt aber $\mathfrak{A}_\Psi \models \varphi_0 \wedge \neg\varphi_0$ und wir haben einen Widerspruch erreicht. Nach dem Kompaktheitssatz gibt es eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ, so dass

$$\Psi_0 = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$$

nicht konsistent ist. Jetzt können wir zeigen, dass $\{X_\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$ eine endliche Teilüberdeckung von Σ ist. Wir betrachten ein beliebiges Element $\mathfrak{A}$ von Σ. Es muss ein $\varphi \in \Phi_0$ geben, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ (sonst wäre $\mathfrak{A}$ ein Modell von Ψ_0). Das heißt aber, dass $\mathfrak{A} \in X_\varphi$. Da $\mathfrak{A}$ beliebig war, erhalten wir $\Sigma = \bigcup\{X_\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$. $\square_{A4(Blatt6)}$

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währinger Strasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE Grundzüge der mathematischen Logik (SS 2017)
Ausgewählte Lösungen - Übungsblatt 10

Joaquín Padilla Montani (a1408360@unet.univie.ac.at)

8. Juni 2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}$ eine beliebige Sprache und sei T eine widerspruchsfreie Theorie. Zeigen Sie, dass T eine vollständige Erweiterung hat.

Proof. Let φ be an $\mathcal{L}$-sentence. In class we proved that $T \cup \{\varphi\}$ and $T \cup \{\neg\varphi\}$ cannot both be simultaneously inconsistent.

Assume $\mathcal{L}$ is an enumerable language. Consider, for each $n \in \mathbb{N}$, the set W_n of finite words of length n using the alphabet of $\mathcal{L}$ and the symbols in $\{\neg, \wedge, \doteq, \exists, (,), v_0, v_1, v_2, \dots\}$. Using **Übungsblatt 8 Aufgabe 8 (2)** we can prove that W_n is enumerable, and using **Übungsblatt 8 Aufgabe 8 (1)** we can prove that $\bigcup\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ is enumerable. Then any $\mathcal{L}$-sentence φ is an element of $\bigcup\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, and therefore the set of $\mathcal{L}$-sentences is enumerable. We can now construct a complete theory T^* as done in class, by attaching to T either φ_i or $\neg\varphi_i$ from our listing of $\mathcal{L}$-sentences $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.

Now assume $\mathcal{L}$ is not enumerable. Let A be a set and let $<$ be an ordering on A (an anti-reflexive and transitive relation). A set $C \subseteq A$ is called a *chain* if and only if $< \restriction C$ is a linear ordering on C (an anti-reflexive and transitive relation with trichotomy law). Recall the statement of

> **Zorn's lemma.** Let A be a nonempty set and let $<$ be an ordering on A, such that for any chain $C \subseteq A$ there exists an $x \in A$ such that there is no $y \in C$ with $x < y$. Then there exists an $x_{max} \in A$ such that no $y \in A$ satisfies $x_{max} < y$. In words, if every chain in A has an upper bound in A, then A contains at least one maximal element.

We will prove in class that Zorn's lemma is equivalent to (AC). Consider the set S of all $\mathcal{L}$-sentences. Then the set of all consistent extensions of T, call it A, satisfies $A \subseteq \mathcal{P}(S)$. The set A has a natural ordering given by $\subsetneq$. For $C \subseteq A$ a chain, define $T_C := \bigcup C$. Then for any $y \in C$ it is true that $y \subseteq T_C$, i.e., T_C is an upper bound for C, provided that $T_C \in A$. Indeed, suppose that T_C is inconsistent, then we can find $\psi_1, \dots, \psi_n \in T_C$ such that $\vdash_{\mathcal{L}} \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n)$. But then, since we have finitely many sentences $\psi_1, \dots, \psi_n$ and C is a chain, we could find $y \in C$ such that $\psi_1, \dots, \psi_n \in y$, so $y \in A$ would be inconsistent, and that contradicts the definition of A. Using Zorn's lemma, there exists $T^* \in A$ maximal. That is, we found an extension T^* of T which is consistent and such that any other consistent extension of T is a subset of T^*. To show that T^* is complete, it remains to argue why T^* contains any sentence or its negation. Indeed, for any $\mathcal{L}$-sentence φ, if $T^* \cup \{\varphi\}$ is consistent, then $\varphi \in T^*$ by the maximality of T^*, and if $T^* \cup \{\varphi\}$ is inconsistent, then we proved in class that $T^* \cup \{\neg\varphi\}$ is consistent, and we get $\neg\varphi \in T^*$ again by the maximality of T^*. $\square$

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Hilfe des Auswahlsaxioms: Eine lineare Ordnung $<$ auf einer Menge M ist genau dann eine Wohlordnung, wenn es keine Folge $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ von Elementen von M mit $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Proof. Let $<$ be a linear ordering (anti-reflexive, transitive relation with trichotomy law) on a set M. Assume that M is not well-ordered by $<$. By definition, this means that there exists a nonempty set $A \subseteq M$ with no $<$-minimal element, which implies that, for each $a \in A$, the set $B_a = \{x \in A \mid x < a\} \subseteq A$ is nonempty. Applying the axiom of choice to the nonempty set of nonempty sets $C = \{B_a \subseteq A \mid a \in A\}$ we can find a choice function $f : C \to \bigcup C$ such that, for each $a \in A$, $f(B_a) \in B_a$ and therefore $f(B_a) < a$. Now we can inductively define a sequence $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ of elements of A by setting $x_0 = a_0$ and $x_{n+1} = f(B_{x_n})$, where $a_0 \in A$ is some arbitrary element of A. By definition of f we have that $x_{n+1} < x_n$. This proves the direction of the statement which we did not prove in class. $\square$

UE Grundzüge der mathematischen Logik (SS 2017)
Ausgewählte Lösungen - Übungsblatt 10

Joaquín Padilla Montani (a1408360@unet.univie.ac.at)

8. Juni 2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}$ eine beliebige Sprache und sei T eine widerspruchsfreie Theorie. Zeigen Sie, dass T eine vollständige Erweiterung hat.

Proof. Let φ be an $\mathcal{L}$-sentence. In class we proved that $T \cup \{\varphi\}$ and $T \cup \{\neg\varphi\}$ cannot both be simultaneously inconsistent.

Assume $\mathcal{L}$ is an enumerable language. Consider, for each $n \in \mathbb{N}$, the set W_n of finite words of length n using the alphabet of $\mathcal{L}$ and the symbols in $\{\neg, \wedge, \doteq, \exists, (,), v_0, v_1, v_2, \dots\}$. Using **Übungsblatt 8 Aufgabe 8 (2)** we can prove that W_n is enumerable, and using **Übungsblatt 8 Aufgabe 8 (1)** we can prove that $\bigcup\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ is enumerable. Then any $\mathcal{L}$-sentence φ is an element of $\bigcup\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, and therefore the set of $\mathcal{L}$-sentences is enumerable. We can now construct a complete theory T^* as done in class, by attaching to T either φ_i or $\neg\varphi_i$ from our listing of $\mathcal{L}$-sentences $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.

Now assume $\mathcal{L}$ is not enumerable. Recall the statement of the

> **Hausdorff maximal principle.** Let F be a set and let $\mathcal{F}$ be a collection of subsets of F with the property that for any chain $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ (i.e. $X \subseteq Y$ or $Y \subseteq X$ for any $X, Y \in \overline{\mathcal{F}}$) it is true that $\bigcup \overline{\mathcal{F}} = \{a \in F \,|\, a \in X \text{ for some } X \in \overline{\mathcal{F}}\}$ is an element of $\mathcal{F}$. Then there exists an $x_{max} \in \mathcal{F}$, such that no proper superset of x_{max} is also an element of $\mathcal{F}$.

Let F be the set of all $\mathcal{L}$-sentences. Then the set of all consistent extensions of T, call it $\mathcal{F}$, satisfies $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(F)$. For $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ a chain, we want to show that $\bigcup \overline{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$, that is, we want to show that the theory $\bigcup \overline{\mathcal{F}}$ is consistent (the fact that it contains T is clear). Indeed, suppose that $\bigcup \overline{\mathcal{F}}$ is inconsistent, then we can find $\psi_1, \dots, \psi_n \in \bigcup \overline{\mathcal{F}}$ such that $\vdash_{\mathcal{L}} \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$. But then, since we have finitely many sentences $\psi_1, \dots, \psi_n$ and $\overline{\mathcal{F}}$ is a chain, we could find $y \in \overline{\mathcal{F}}$ such that $\psi_1, \dots, \psi_n \in y$, so $y \in \mathcal{F}$ would be inconsistent, and that contradicts the definition of $\mathcal{F}$. By the Hausdorff maximal principle, there exists $T^* \in \mathcal{F}$ maximal. That is, we found an extension T^* of T which is consistent and such that any other consistent extension of T is a subset of T^*. To show that T^* is complete, it remains to argue why T^* contains any sentence or its negation. Indeed, for any $\mathcal{L}$-sentence φ, if $T^* \cup \{\varphi\}$ is consistent, then $\varphi \in T^*$ by the maximality of T^*, and if $T^* \cup \{\varphi\}$ is inconsistent, then we proved in class that $T^* \cup \{\neg\varphi\}$ is consistent, and we get $\neg\varphi \in T^*$ again by the maximality of T^*. $\square$

Michael König

Bonus Blatt:

z.z. eine unendliche Karte $\langle C,N \rangle$ ist vier färbbar gdw. jede endl. Teilkarte vierfärbbar ist.

Hinweis: $\langle C,N \rangle$, C ... Menge der Länder
Nachbarschafts-beziehung N ... Menge der Paare $\{c,d\} \hat{=}$ angrenzende Länder.
vierfärbbar wenn: $\exists F: C \to \{1,2,3,4\}$, s.d. $F(c) \neq F(d)$ wenn $\{c,d\} \in N$

Betrachte: unendl. Menge $\{A_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ mit c_i ist Land, j ist Farbe.

Menge Φ aller Aussagenlogische Formeln:

1) $A_{i,j} \to \neg A_{i',j}$ und $A_{i',j} \to \neg A_{i,j}$ wobei $j \in \{1,\dots,4\}$ und $\{c_j, c_j\} \in N$

2) $A_{i,1} \vee A_{i,2} \vee A_{i,3} \vee A_{i,4}$ für $i \in \mathbb{N}$

3) $A_{i,j} \to \neg A_{i,j'}$ für $j' \in \{1,\dots,4\} \setminus \{j\}$, $i \in \mathbb{N}$

In der Graphentheorie bedeuten die Aussagen 1-3 folgendes:
1) ... Nachbarn haben unterschiedliche Farbe
2) ... jedes Land muss gefärbt werden mit einer der 4-Farben
3) ... kein Land kann 2 Farben bekommen.

Bew: „⇒" trivial wenn unendliche Karte viergefärbt ist, dann auch jede endl. Teilkarte
„⇐" Ang. jede endliche Teilkarte von $\langle C,N \rangle$ ist vierfärbbar.

⇒ •) jede endliche TM von Φ ist erfüllbar, da Φ lediglich die Aussagen aus Graphentheorie in Logik übersetzt. (Siehe 1-3)

•) Betrachte eine Belegung $\mathcal{B}$ ~~...~~, mit ~~...~~. $\mathcal{B} \models \Phi$.
Dies ~~ist~~ entspricht einer zulässige Färbung von $\langle C,N \rangle$, da (1, 2, 3) korrekt ist.

⇒ Φ ist erfüllbar gdw. es existiert eine Vierfärbung von $\langle C,N \rangle$
dies gilt laut Annahme für jede endl. Teilkarte also auch für jede endl. TM Φ.

•) Kompaktheitssatz: Wenn jede endliche TM von Φ erfüllbar ist, dann auch Φ

⇒ die Behauptung, da Φ widerum in die Graphentheorie übersetzt werden kann und somit die unendliche Karte vierfärbbar ist.

GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017)

Aufgabe 1 Auf einer Insel sind unendlich viele Mathematiker gestrandet. Eine Fee kommt und verspricht, die Mathematiker zu retten, wenn sie die folgende Prüfung bestehen: jeder Mathematiker bekommt einen Hut aufgesetzt, der schwarz oder weiß ist. Jeder kann alle Hüte außer seinem eigenen sehen. Dann gibt die Fee ein Zeichen, und alle Mathematiker müssen gleichzeitig raten, welche Farbe ihr eigener Hut hat. Wenn nur endlich viele Mathematiker falsch raten, werden sie gerettet. Mit welcher Strategie können die Mathematiker sicherstellen, dass sie geretter werden?

Bevor die Hüte aufgesetzt werden, dürfen sich die Mathematiker beraten und eine Strategie ausmachen; nachdem die Hüte aufgesetzt wurden, darf zwischen den Mathematikern überhaupt keine Kommunikation mehr stattfinden; jeder kann seine Antwort also nur davon abhängig machen, was er auf den Köpfen der anderen sieht.

Hinweis: Die Mathematiker können beim Planen der Strategie *das Auswahlaxiom* verwenden.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`