universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Lokale Eigenschaften topologischer Funktionenräume und mengenwertige Abbildungen“

verfasst von / submitted by

Lesya Zdomska

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 190 406 362
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UniStG UF Mathematik UniStG UF Russisch UniStG
Betreut von / Supervisor:	Vera Fischer, Privatdoz. PhD

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem meiner Betreuerin Vera Fischer und meinen Familienangehörigen, welche mich während meines Studiums unterstützt haben.

Spezielles Dank gilt Sophie Seiser, die mir mit der Grammatikkorrektur geholfen hat.

Inhaltsverzeichnis

0.1 Zusammenfassung

Diese Arbeit konzentriert sich auf Dualitäten in der Theorie der Funktionenräume mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, die in der Regel auf die folgende Weise formuliert sind: Ein Raum X hat eine Eigenschaft P genau dann, wenn $C_p(X)$ Q erfüllt. Die Abschnitte 3.1, 3.3, 3.4, und 3.5 im Kapitel 3 widmen sich solchen Dualitäten, wobei P immer eine klassische Überdeckungseigenschaft von X ist, während wir im Abschnitt 3.2 die separablen Funktionenräume beschreiben. Q ist hier die entsprechende lokale Eigenschaft von $C_p(X)$. Für manche Räume X lassen sich diese lokalen Eigenschaften von $C_p(X)$ mithilfe der natürlichen verträglichen algebraischen Struktur auf den gesamten Funktionenraum extrapolieren, siehe Abschnitte 3.3 und 3.4.

Kapitel 1 und 2 lassen sich als eine Art Vorbereitung zu Kapitel 3 verstehen, das einen zentralen Platz in dieser Arbeit einnimmt. Insbesondere machen diese die gesamte Arbeit in sich geschlossener, da wir uns hier einige grundlegende Begriffe und deren Eigenschaften in Erinnerung rufen, die im Kapitel 3 betrachtet werden. Unsere Darstellung im Kapitel 1 ist manchmal ähnlich wie die in [3]. Allerdings geben wir immer mehr Details und ändern bedarfsgerecht die Reihenfolge der Ergebnisse.

In dieser Arbeit werden keine neuen Sätze bewiesen, für einige bekannte Sätze werden jedoch neue Beweise geliefert, die sich auf mengenwertige Abbildungen mit bestimmten topologischen Eigenschaften stützen, siehe Abschnitte 3.1, 3.3, 3.4, und 3.5 im Kapitel 3.

0.2 Abstract

This work is concentrated on dualities in the theory of function spaces with the topology of pointwise convergence, of the following form: A space X has property P if and only if $C_p(X)$ satisfies Q. Sections 3.1, 3.3, 3.4, and 3.5 of Chapter 3 are devoted to such results, where P is some classical covering property, and in Section 3.2 we present the characterization of separable function spaces. Q is usually some local property of $C_p(X)$. For certain spaces X these local properties of $C_p(X)$ could be extrapolated onto the entire space using its algebraic structure agreeing to its topology, see Sections 3.3 and 3.4.

Chapters 1 and 2 may be thought of as a preparation to Chapter 3 which is the main one in this work. In particular, they make the work more self-contained, as we remind basic notions we work in Chapter 3 with as well as useful properties thereof. The exposition in Chapter 1 is in some places similar to that in [3], but we usually give more details and change the consequence of results according to our needs.

There are no new results in this work. However, we suggest new alternative proofs to known results, which are based on set-valued maps with certain topological properties, see Sections 3.1, 3.3, 3.4, und 3.5 of Chapter 3.

0.3 Einleitung

Sind X und Y topologische Räume, so bezeichnet man $C(X,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y. In der Funktionalanalysis werden verschiedene Topologien auf $C(X,Y)$ untersucht, am häufigsten die Topologie der gleichmäßigen bzw. der kompakten Konvergenz. In dieser Arbeit werden wir uns auf die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $C(X,\mathbb{R})$ konzentrieren. Anders gesagt ist diese die Teilraumtopologie auf $C(X,\mathbb{R})$, wenn wir $C(X,\mathbb{R})$ als einen Teilraum vom kartesischen Produkt $\mathbb{R}^X = \prod_{x\in X}\mathbb{R}$, ausgestattet mit der Produkttopologie, betrachten. Den erhaltenen Raum bezeichnet man in der Literatur als $C_p(X)$, wobei "p" für "pointwise/punktweise" steht. Das Studium solcher Räume ist ein Teil der allgemeinen Topologie, der an der Grenze zur Funktionalanalysis liegt und oft auf die Methoden der Mengenlehre zurückgreift.

Der Übergang von einem Raum X zu dem entsprechenden Funktionenraum $C_p(X)$ ist in vielerlei Hinsicht interessant. Für einen diskreten Raum X ist $C_p(X)$ das kartesische Produkt $\mathbb{R}^X$, und für die "standarden" Räume X wie $[0,1]$, $\mathbb{R}$, usw. kann der Raum $C_p(X)$ auch als "standard" betrachtet und als solcher fürs Studium anderer Räume verwendet werden. Es ist übrigens noch immer unbekannt, ob $C_p([0,1])$ und $C_p([0,1]^2)$ homöomorph sind. Natürlich sind X und $C_p(X)$ in der Regel sehr unterschiedlich, zum Beispiel ist $C_p(X)$ ein topologischer Vektorraum (und sogar eine topologische $\mathbb{R}$-Algebra), weil auf dem $C_p(X)$ neben seiner topologischen Struktur noch eine natürliche und damit verträgliche algebraische definiert ist. Darüber hinaus sind C_p-Räume fast nie metrisierbar (eigentlich ist dies nur der Fall für abzählbare Räume X), zum Beispiel ist $C_p(\mathbb{R})$ in vielen Hinsichten weit von metrischen Räumen entfernt. Dies könnte aber auch als Vorteil gesehen werden: Man könnte versuchen, mithilfe der C_p-Konstruktion aus relativ einfachen und wohlverstandenen Räumen wie $\mathbb{R}$ verschiedene (Gegen)beispiele zu konstruieren, siehe, z. B., Folgerung 3.5.12.

In [3] wird die "allgemeine Aufgabe A" für die C_p-Theorie von Arkhangel'skii formuliert: Unter anderem ist zu untersuchen, welche Paare P, Q von topologischen Eigenschaften dual im Sinne sind, dass ein Raum X Eigenschaft P genau dann hat, wenn $C_p(X)$ Q erfüllt. Abschnitte 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, und 3.5 widmen sich solchen Dualitäten, wobei P immer eine klassische Überdeckungseigenschaft von X und Q die entsprechende lokale Eigenschaft von $C_p(X)$ ist. Für manche Räume X lassen sich diese lokalen Eigenschaften von $C_p(X)$ auf den gesamten Funktionenraum extrapolieren, siehe Abschnitte 3.3 und 3.4.

Wegen des Aussehens der Topologie von $C_p(X)$, in der basische Umgebungen unter anderem von endlichen Teilmengen von X abhängen, "spricht" oft P über alle X^n, wobei $n \in \omega$, siehe Abschnitte 3.1, 3.3 und 3.4. Es gibt auch Ausnahmen, siehe Abschnitt 3.5.

Kapitel 1

Funktionenräume: Grundbegriffe und einfache Konstruktionen

1.1 Produkttopologie

In diesem Abschnitt zeigen wir eine Reihe von Begriffen auf und sammeln allgemeine Fakten über (unendliche) Produkte topologischer Räume, die in der C_p-Theorie oftmals benutzt werden. Diese könnten in [10, 16] gefunden werden, und kommen in der Regel als Hilfsmittel in Vorlesungen über Topologie vor. Daher liefern wir fast keine Beweise. Vielmehr wollen wir Bezeichnungen erklären, die in kommenden Abschhnitten verwendet werden.

Sei X_α für jedes $\alpha \in A$ eine Menge. Das *Produkt der* X_α ist die Menge

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \big\{x : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid \forall \alpha \in A \big(x(\alpha) \in X_\alpha\big)\big\}.$$

Der Wert von x an der Stelle α, $x(\alpha)$, wird oft auch als x_α bezeichnet und heißt die *α-te Koordinate von x*. Man schreibt auch $\langle x_\alpha : \alpha \in A\rangle$ statt x. X_α heißt *der α-te Faktor* von $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Ist $X_\alpha = X$ für alle $\alpha \in A$, dann schreibt man auch X^A statt $\prod_{\alpha \in A} X$. Die Abbildung $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$, definiert durch $\pi_\alpha : \langle x_\alpha : \alpha \in A\rangle \mapsto x_\alpha$, heißt *Projektionsabbildung von $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ auf X_α* oder einfach die *α-te Projektionsabbildung.*

Sei nun $\{\langle X_\alpha, \tau_\alpha\rangle : \alpha \in A\}$ eine Familie topologischer Räume, $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ das Produkt der X_α, und $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$ die Projektionsabbildungen, wobei $\alpha \in A$. Die

Produkttopologie τ auf X wird durch die Basis

$$\mathcal{B} = \Big\{ \bigcap_{\alpha \in K} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : K \subset A \text{ endlich}, \forall \alpha \in K \ (U_\alpha \in \tau_\alpha) \Big\}$$

definiert. $\langle X, \tau \rangle$ heißt *Produktraum* oder *topologisches Produkt* der Räume $\langle X_\alpha, \tau_\alpha \rangle$. $\mathcal{B}$ ist hinsichtlich endlicher Durchschnitte abgeschlossen. Eine Teilmenge $B \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ gehört genau dann zu $\mathcal{B}$, wenn $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, U_α offen in X_α, und $U_\alpha = X_\alpha$ für fast alle $\alpha \in A$ ist, wobei "fast alle" in dieser Arbeit "alle außer vielleicht endlich vielen" bedeutet.

Aus der oberen Definition ergibt sich gleich die natürliche Subbasis der Produktopologie τ:

$$\mathcal{S} = \big\{ \pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \tau_\alpha \big\}.$$

Die Menge der endlichen Durchschnitte dieser Mengen ist gerade die Menge $\mathcal{B}$. $\mathcal{S} \subset \tau$ bedeutet einfach definitionsgemäß, dass alle Projektionsabbildungen π_α stetig sind.

Die Abbildung $h : Y \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ von einem topologischen Raum Y in den Produktraum $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildung $h_\alpha := \pi_\alpha \circ h : Y \to X_\alpha$ stetig für jedes $\alpha \in A$ ist. Die "genau dann" Richtung folgt aus der Stetigkeit der Projektionsabbildungen π_α.

Um die "wenn" Richtung zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die Urbilder der Elemente von $\mathcal{S}$ offen in Y sind. Für jedes Element $S = \pi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{S}$, wobei $U \in \tau_\alpha$, haben wir

$$h^{-1}(S) = h^{-1}\big(\pi_\alpha^{-1}(U)\big) = (h \circ \pi_\alpha)^{-1}(U),$$

und die letztere Menge ist offen in Y, weil $U \in \tau_\alpha$ und $h \circ \pi_\alpha : Y \to X_\alpha$ stetig ist.

Die Produkttopologie auf $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ist die gröbste Topologie, für die alle Projektionen $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$ stetig sind: Jede solche Topologie τ' auf $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ muss alle Urbilder $\pi_\alpha^{-1}(U)$, $U \in \tau_\alpha$, enthalten, und daher $\mathcal{S} \subset \tau'$, was eben $\tau \subset \tau'$ impliziert.

Der folgende Satz von A. Tychonoff ist von fundamentaler Bedeutung und könnte in fast allen Topologiebüchern (z.B. [10, 16]) gefunden werden.

Satz 1.1.1. *Ist $\{\langle X_\alpha, \tau_\alpha \rangle : \alpha \in A\}$ eine Familie kompakter topologischer Räume, dann ist auch das kartesische Produkt $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit der Produkttopologie τ kompakt.*

Für uns sind die Produkte $\mathbb{R}^A = \prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie und ihre Teilräume besonders wichtig. Zuerst erinnern wir uns an die Beschreibung der Räume, die in $\mathbb{R}^A$ für A "groß genug" eingebettet werden könnten.

Ein topologischer Raum X heißt

- T_l-*Raum,* wenn für zwei beliebige verschiedene Punkte x_0, x_1 aus X, es gibt eine Umgebung $U_0 \ni x_0$, sodass $x_1 \notin U_0$; Oder, äquivalent, wenn jede einpunktige Teilmenge $\{x\} \subset X$ abgeschlossen ist;

- T_3-Raum, wenn jede abgeschlossene Teilmenge A von X und jeder Punkt $x \notin A$ disjunkte Umgebungen besitzen;

- $T_{3\frac{1}{2}}$-*Raum,* wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \notin A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ gibt, sodass $f(x) = 1$ und $f \restriction A \equiv 0$.

Die Eigenschaften, die oben für T_i-Räume gefordert wurden, heißen oft T_i-Axiome oder *Trennungsaxiome.* T_1 - Räume, die weitere Trennungseigenschaften haben, erhalten besondere Bezeichnungen. Ein topologischer Raum X heißt

- *regulär*, wenn er gleichzeitig ein T_1- und ein T_3-Raum ist;

- *vollständig-regulär*, wenn er gleichzeitig ein $T_{3\frac{1}{2}}$- und ein T_l-Raum ist.

Vollständig-reguläre Räume erlauben für genauso viele stetige Funktionen in $\mathbb{R}$, die für eine Einbettung in $\mathbb{R}^A$ für passende A nötig sind.

Der folgende Satz könnte auch in fast allen Topologiebüchern gefunden werden, siehe, z.B., [16, Satz 7, S. 161]. Der wurde ebenfalls zuerst von A. Tychonoff bewiesen. Daher heißen vollständig-reguläre Räume auch *Tychonoff-Räume.*

Satz 1.1.2. *Sei X ein vollständig-regulärer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis von X. Dann könnte X in den Produktraum $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ eingebettet werden. Insbesodere kann jeder vollständig-reguläre Raum X mit abzählbarer Basis in $\prod_{n\in\omega}\mathbb{R}$ eingebettet werden, und ist deshalb metrisierbar.*

Sei $\{\langle F_\alpha, x_\alpha\rangle : \alpha \in A\}$ eine Aufzählung aller Paare $\langle F, x\rangle$, wobei $F \subset X$ abgeschlossen ist und $x \notin F$. Für jedes α gibt es eine stetige Funktion $f_\alpha : X \to [0,1]$, sodass $f(x_\alpha) = 1$ und $f \restriction F_\alpha \equiv 0$. Es ist einfach zu verifizieren, dass die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^A$, $f(x)(\alpha) := f_\alpha(x)$, eine Einbettung ist. Allerdings, um solche A zu finden, die dieselbe Kardinalität hat, wie eine vorgegebene Basis von X, muss man die Auswahl der Punkte und entsprechenden abgeschlossenen Mengen etwas optimieren.

Im Folgenden werden wir *nur mit vollständig-regulären Räumen arbeiten,* diese Eigenschaft ist erforderlich für einige der grundlegenden Sätze der C_p-Theorie.

Der topologische Raum X erfüllt die *abzählbare Antikettenbedingung*, wenn jede Familie von offenen, paarweise disjunkten Teilmengen von X höchstens abzählbar ist. Die abzählbare Antikettenbedingung folgt offensichtlich aus der Separabilität: Wenn wir jedem Element der Antikette einen Punkt der abzählbaren dichten Menge zuordnen, dann ist diese Abbildung injektiv. Die Umkehrung gilt für allgemeine vollständig-reguläre Räume nicht, zum Beispiel werden wir gleich zeigen, dass alle (inkl. unabzählbare) Potenzen von $\mathbb{R}$ die abzählbare Antikettenbedingung erfüllen, obwohl $\mathbb{R}^A$ nicht separabel für $|A| > |\mathbb{R}|$ ist.

Der nächste Satz könnte als "Folklore" betrachtet werden, siehe z.B. [19, Th. 1.9, S. 51].

Satz 1.1.3. *$\mathbb{R}^A$ erfüllt die abzählbare Antikettenbedingung für alle A.*

Sei S eine Familie von Mengen, und s eine weitere Menge. D ist ein *Δ-System mit Wurzel* s, wenn $s_0 \cap s_1 = s$ für beliebige $s_0 \neq s_1$ aus S. Der Beweis des Satzes 1.1.3 fußt auf dem folgendem Δ-Lemma, siehe [19, Th. 1.5, S. 49].

Lemma 1.1.4. *Jede überabzählbare Familie endlicher Mengen enthält ein überabzählbares Δ-System.*

Beweis vom Satz 1.1.3. Wir nehmen an, dass es eine überabzählbare Familie $\mathcal{U}$ von offenen, paarweise disjunkten Teilmengen von $\mathbb{R}^A$ gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass $\mathcal{U}$ aus den standarden Basiselementen besteht. Also

$$\mathcal{U} = \Big\{U_s := \bigcap_{\alpha \in s} \pi_\alpha^{-1}(U_{s,\alpha}) \ : \ s \in S\Big\},$$

wobei S eine überabzählbare Familie endlicher Teilmengen von A ist. Aus dem Lemma 1.1.4 ergibt sich ein überabzählbares Δ-System $S' \subset S$. Sei s' die Wurzel von S'. Da $\mathbb{R}^{s'}$ separabel ist (s' ist endlich), es gibt eine überabzählbare Familie $S'' \subset S$ und $q \in \mathbb{Q}^{s'}$, sodass $q \in \bigcap_{\alpha \in s'} \pi_\alpha^{-1}(U_{s,\alpha})$ für alle $s \in S''$. Seien nun $s_0, s_1 \in S''$, $s_0 \neq s_1$. Für alle $\alpha \in s_i \setminus s'$ nehmen wir $r_\alpha^i \in \pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha,s_i})$, wobei $i \in \{0,1\}$. Dann liegt die Funktion

$x \in \mathbb{R}^A$,

$$x(\alpha) = \begin{cases} q(\alpha), & \alpha \in s', \\ r^0_\alpha & \alpha \in s_0 \setminus s', \\ r^1_\alpha & \alpha \in s_1 \setminus s', \\ 1 & \alpha \in A \setminus (s_0 \cup s_1), \end{cases}$$

in der Schnittmenge $U_{s_0} \cap U_{s_1}$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass $\mathcal{U}$ disjunkt ist. $\square$

Sei $U = \bigcap_{x \in Y} \pi_x^{-1}(U_x)$, wobei Y eine endliche Teilmenge von X ist, und $U_x \subset \mathbb{R}$ offen ist. Seien $a_x \in U_x$ und $\varepsilon_x > 0$, $x \in Y$, sodass $(a_x - \varepsilon_x, a_x + \varepsilon_x) \subset U_x$. Dann für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_x : x \in Y\}$ gilt:

$$U_0 = \bigcap_{x \in Y} \pi_x^{-1}(a_x - \varepsilon, a_x + \varepsilon) \subset U.$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\Big\{ \bigcap_{x \in Y} \pi_x^{-1}(a_x - \varepsilon, a_x + \varepsilon) \ : \ X \supset Y \text{ endlich ist, } a_x \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in Y, \varepsilon > 0 \Big\}$$

eine Basis der Produkttopologie ist. Insbesondere ist

$$\Big\{ \bigcap_{x \in Y} \pi_x^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \ : \ X \supset Y \text{ ist endlich, } \varepsilon > 0 \Big\}$$

eine Umgebungsbasis für die konstante Funktion 0, also die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 0$ für jedes $x \in X$. Künftig verwerden wir die Bezeichnung

$$W(Y, \epsilon) = \bigcap_{x \in Y} \pi_x^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$$

für Elemente dieser Umgebungsbasis.

$C_p(X)$ liegt dicht in $\mathbb{R}^X$: Sei wieder $U_0 = \bigcap_{x \in Y} \pi_x^{-1}(a_x - \varepsilon, a_x + \varepsilon)$, wobei $Y \subset X$ endlich ist. Wegen der vollständigen Regularität gibt es für jedes $x \in Y$ eine stetige Funktion $f^x : X \to \mathbb{R}$, sodass $f^x(x) = 1$ und $f^x \restriction (Y \setminus \{x\}) \equiv 0$. Dann gilt für die Funktion $f := \sum_{x \in Y} a_x \cdot f^x \in C_p(X)$

$$f(x) = \sum_{x' \in Y} a_{x'} f^{x'}(x) = \sum_{x' \in Y, x' \neq x} a_{x'} f^{x'}(x) + a_x f^x(x) = 0 + a_x = a_x$$

für alle $x \in Y$, was $f \in U_0$ impliziert.

Folgerung 1.1.5. *$C_p(X)$ erfüllt die abzählbare Antikettenbedingung für alle vollständig-regulären Räume X.*

Beweis. Nach dem Satz 1.1.3 erfüllt $\mathbb{R}^X$ die abzählbare Antikettenbedingung, und $C_p(X)$ liegt dicht in $\mathbb{R}^X$. Deshalb genügt es, die folgende Aussage zu beweisen:
Erfüllt ein vollständig-regulärer Raum Z die abzählbare Antikettenbedingung, so tut es auch jeder Teilraum T von Z, der dicht in Z liegt.
Das ist tatsächlich der Fall, sonst gäbe es eine überabzählbare disjunkte Familie $\mathcal{W}$ von offenen Teilmengen von T. Für jede Menge $W \in \mathcal{W}$ finden wir eine in Z abgeschlossene Teilmenge F_W mit $F_W \cap T = T \setminus W$. Dann ist $O_W := Z \setminus F_W$ eine offene Teilmenge von Z und

$$O_W \cap T = (Z \setminus F_W) \cap T = T \setminus (F_W \cap T) = T \setminus (T \setminus W) = W.$$

Es bleibt einzusehen, dass $O_W \cap O_{W'} = \emptyset$ für unterschiedliche (und deshalb disjunkte) $W, W' \in \mathcal{W}$. Sonst gilt $O_W \cap O_{W'} \neq \emptyset$. Folglich $O_W \cap O_{W'} \cap T \neq \emptyset$ wegen der Dichtigkeit von T, also

$$\emptyset \neq O_W \cap O_{W'} \cap T = (O_W \cap T) \cap (O_{W'} \cap T) = W \cap W',$$

im Widerspruch zu unserer Annahme, dass die Familie $\mathcal{W}$ disjunkt ist. □

1.2 Duale Abbildungen und Einschränkungen

In diesem Abschnitt sammeln wir weitere Fakten über die Funktionenräume mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Diese Fakten könnten, z. B., in [3, Ch. 0, § 4] gefunden werden. Wir haben lediglich einige Details hinzugefügt.

Sei Z ein Teilraum eines Raums X. Wir untersuchen in diesem Abschnitt zuerst die Abbildung $p_Z : C_p(X) \to C_p(Z)$, $p_Z : f \mapsto f \restriction Z$.

Hilfssatz 1.2.1. *(i) p_Z ist stetig und $\overline{p_Z(C_p(X))} = C_p(Z)$;*

(ii) Ist Z abgeschlossen in X, so ist p_Z eine offene Abbildung von $C_p(X)$ in $p_Z[C_p(Z)]$, mit der Unterraumtopologie vererbt von $C_p(Z)$;

(iii) Liegt Z dicht in X, so ist p_Z injektiv.

Beweis. (i). Offensichlich gilt:

$$p_Z^{-1}\big[\bigcap_{x\in K}\pi_x^{-1}[U_x]\cap C_p(Z)\big]=\bigcap_{x\in K}\pi_x^{-1}[U_x]\cap C_p(X),$$

wobei K eine endliche Teilmenge von Z ist. Daraus ergibt sich die gewünschte Stetigkeit. (In der oberen Formel bezeichnet π_x die Abbildung von $\mathbb{R}^Z$ bzw. $\mathbb{R}^X$ in $\mathbb{R}$ auf der linken bzw. rechten Seite.)

(ii). Sei $W=\bigcap_{x\in K}\pi_x^{-1}[U_x]\cap\bigcap_{x\in L}\pi_x^{-1}[U_x]\cap C_p(X)$, wobei K bzw. L eine endliche Teilmenge von Z bzw. $X\setminus Z$ ist. Wir werden zeigen, dass

$$p_Z[W]=\bigcap_{x\in K}\pi_x^{-1}[U_x]\cap p_Z[C_p(X)],$$

was eben die Offenheit von $p_Z : C_p(X)\to p_Z[C_p(X)]$ bedeutet. Die Inklusion "$\subset$" ist offensichtlich. Um die Richtung "$\supset$" zu zeigen, nehmen wir eine Funktion $f\in\bigcap_{x\in K}\pi_x^{-1}[U_x]\cap p_Z[C_p(X)]\subset C_p(Z)$ und finden $h\in C_p(X)$ mit $f=p_Z(h)=h\restriction Z$. Da X vollständig-regulär ist, für jedes $x\in L$ gibt es $h_x\in C_p(X)$, für die $f_x(x)\in U_x-h(x)$ und $f_x\restriction(Z\cup L\setminus\{x\})\equiv 0$ gilt. Dann gilt für $h'=h+\sum_{x\in L}h_x$:

$$h'\restriction Z=h\restriction Z=f\quad\text{und}\quad h'(x)\in U_x \text{ für alle } x\in L,$$

und daher $h'\in W$ und $p_Z(h')=f$.

(iii). Wenn $f\restriction Z=f'\restriction Z$ für $f,f'\in C_p(X)$, dann $f=f'$ weil Z dicht ist. Also $p_Z(f)=p_Z(f')$ impliziert $f=f'$. □

Folgerung 1.2.2. *Sei Z ein dichter Teilraum von X. Dann ist $p_Z\restriction K : K\to p_Z[K]\subset C_p(Z)$ ein Homeomorphismus für jeden kompakten Teilraum K von $C_p(X)$. Insbesondere ist K metrisierbar, wenn X separabel ist.*

Beweis. p_Z ist stetig und injektiv, siehe Hilfssazt 1.2.1, und jede stetige injektive Abbildung eines kompakten Raumes ist ein Homeomorphismus auf das Bild.

$C_p(Z)\subset\mathbb{R}^Z$ ist metrisierbar für jeden abzählbaren Z, was den zweiten Teil impliziert. □

Seien X,Z Mengen und $f:X\to Z$ eine Abbildung. Dual zu f wird eine Abbildung $f^\#:\mathbb{R}^Z\to\mathbb{R}^X$ durch die folgende Formel definiert:

$$f^\#:\phi\mapsto\phi\circ f,\ \text{ anders ausgedrückt, } f^\#(\phi)(x)=\phi(f(x)) \text{ für alle } x\in X.$$

In anderen Worten, $f^{\#}(\phi)$ macht das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{f} & X \\ & \overset{\phi}{\searrow} & \downarrow^{f^{\#}(\phi)} \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Es ist leicht einzusehen, dass $\psi \in \mathbb{R}^X \setminus f^{\#}[\mathbb{R}^Z]$ genau dann, wenn es $x_0, x_1 \in X$ mit $\psi(x_0) \neq \psi(x_1)$ und $f(x_0) = f(x_1)$ gibt.

Hilfssatz 1.2.3. *$f^{\#}$ ist stetig, wobei $\mathbb{R}^X$ und $\mathbb{R}^Z$ mit der Produkttopologie versehen sind.*

Beweis. Sei $W = \bigcap_{x\in K} \pi_x^{-1}[U_x]$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^X$, wobei $K \subset X$ eine endliche Teilmenge von X ist, und $U_x \subset \mathbb{R}$ offen für alle $x \in K$ sind. Dann gilt:

$$(f^{\#})^{-1}(W) = \big\{h \in \mathbb{R}^Z \ : \ h \circ f \in W\big\} = \big\{h \in \mathbb{R}^Z \ : \ \forall x \in K \ (h(f(x)) \in U_x)\big\} =$$
$$= \bigcap_{f(x)\in f[K]} \pi_{f(x)}^{-1}[U_x].$$

Die letztere Menge ist offen[1] in $\mathbb{R}^Z$, was die Stetigkeit von $f^{\#}$ beweist. □

Hilfssatz 1.2.4. *Ist f surjektiv, so ist $f^{\#}$ ein Homeomorphismus von $\mathbb{R}^Z$ auf den abgeschlossenen Teilraum $f^{\#}[\mathbb{R}^Z]$ von $\mathbb{R}^X$.*

Beweis. Sei $\psi \in \mathbb{R}^X \setminus f^{\#}[\mathbb{R}^Z]$, also es gibt $x_0, x_1 \in X$ mit $\psi(x_0) \neq \psi(x_1)$ und $f(x_0) = f(x_1)$. Seien U_0, U_1 offene Umgebungen von $\psi(x_0)$ bzw. $\psi(x_1)$ in $\mathbb{R}$, für die gilt $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Dann für $W = \pi_{x_0}^{-1}(U_0) \cap \pi_{x_1}^{-1}(U_1) \subset \mathbb{R}^X$ gilt $\psi \in W$ und $f^{\#}[\mathbb{R}^Z] \cap W = \emptyset$:

$$f^{\#}(\phi)(x_0) = \phi(f(x_0)) = \phi(f(x_1)) = f^{\#}(\phi)(x_1)$$

für alle $\phi \in \mathbb{R}^Z$ gilt, während $\psi'(x_0) \neq \psi'(x_1)$ für alle $\psi \in W$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von $f^{\#}[\mathbb{R}^Z]$ in $\mathbb{R}^X$.

Seien $\phi_0 \neq \phi_1$, $\phi_0, \phi_1 \in \mathbb{R}^Z$. Dann gibt es $z \in Z$ mit $\phi_0(z) \neq \phi_1(z)$ und $x \in X$ mit $f(x) = z$. Schließlich haben wir

$$f^{\#}(\phi_0)(x) = \phi_0(f(x)) = \phi_0(z) \neq \phi_1(z) = \phi_1(f(x)) = f^{\#}(\phi_1)(x)$$

und deswegen $f^{\#}(\phi_0) \neq f^{\#}(\phi_1)$, also ist $f^{\#}$ injektiv.

[1] Wenn es $x_0, x_1 \in X$ mit $f(x_0) = f(x_1)$ und $U_{x_0} \cap U_{x_1} = \emptyset$ gibt, dann ist das Urbild $(f^{\#})^{-1}(W)$ leer.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung

$$f^{\#} : \mathbb{R}^Z \to f^{\#}[\mathbb{R}^Z]$$

offen ist. Sei also $W = \bigcap_{z \in K} \pi_z^{-1}[U_z]$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^Z$, wobei K eine endliche Teilmenge von Z ist. Für jeden $z \in K$ sei $x_z \in X$, sodass $f(x_z) = z$ (f ist surjektiv). Dann gilt:

$$f^{\#}(W) = \{\phi \circ f : \phi \in W\} = \bigcap_{z \in K} \pi_{x_z}^{-1}[U_z] \cap f^{\#}[\mathbb{R}^Z] \subset \mathbb{R}^X,$$

und deswegen ist $f^{\#}(W)$ offen in $f^{\#}[\mathbb{R}^Z]$ als eine Durchschnittsmenge von $f^{\#}[\mathbb{R}^Z]$ und $\bigcap_{z \in K} \pi_{x_z}^{-1}[U_z]$, die offen in $\mathbb{R}^X$ ist. □

Im Folgenden werden wir die Einschränkung der Funktion $f^{\#}$ auf den Teilraum $C_p(Z)$ von $\mathbb{R}^Z$, wobei (anders als oben) Z und X als topologische Räume betrachtet werden. Im Falle X ist ein Teilraum von Z und $f(x) = x$ für alle $x \in X$ gilt $f^{\#} = p_X$. Tatsächlich, wir haben

$$f^{\#}(\phi)(x) = \phi(f(x)) = \phi(x) = p_X(\phi)(x)$$

für alle $x \in X$ und $\phi \in C_p(Z)$. Also ist die Idee hinter den $f^{\#}$-Funktionen allgemeiner als die hinter den Einschränkungen p_*.

Hilfssatz 1.2.5. *Sei $f : X \to Z$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen X und Z.*

(*i*) *f ist genau dann stetig, wenn $f^{\#}[C_p(Z)] \subset C_p(X)$.*

(*ii*) *f ist genau dann stetig und injektiv, wenn $f^{\#}[C_p(Z)]$ dicht in $C_p(X)$ liegt.*

(*iii*) *Ist f surjektiv, dann ist $f^{\#} \restriction C_p(Z) : C_p(Z) \to C_p(X)$ Homeomorphismus genau dann, wenn $f^{\#}[C_p(Z)] = C_p(X)$.*

Beweis. (*i*). Wenn f stetig ist, dann so sind auch alle Kompositionen $\phi \circ f = f^{\#}(\phi)$, wobei $\phi \in C_p(Z)$. Dies bedeutet $f^{\#}[C_p(Z)] \subset C_p(X)$.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es $A \subset X$ und $x \in \bar{A}$, sodass $f(x) \notin \overline{f[A]}$. Sei $\phi \in C_p(Z)$ mit $\phi(f(x)) = 1$ und $\phi \restriction \overline{f[A]} \equiv 0$. Solche ϕ ergibt sich aus der vollständigen Regularität von Z. Dann ist $f^{\#}(\phi) : X \to \mathbb{R}$ nicht stetig, weil $f^{\#}(\phi)[A] = \phi[f[A]] = \{0\}$, $f^{\#}(\phi)(x) = \phi(f(x)) = 1$, und $x \in \bar{A}$.

(ii). Angenommen $f(x_0) = f(x_1)$ für $x_0 \neq x_1$ in X, betrachten wir die offene Teilmenge $W = \pi_{x_0}^{-1}[U_0] \cap \pi_{x_1}^{-1}[U_1] \cap C_p(X)$ von $C_p(X)$, wobei U_0, U_1 offene disjunkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Dann $\psi(x_0) \neq \psi(x_1)$ für alle $\psi \in W$, was $f^{\#}[C_p(Z)] \cap W = \emptyset$ impliziert, weil

$$f^{\#}(\phi)(x_0) = \phi(f(x_0)) = \phi(f(x_1)) = f^{\#}(\phi)(x_1)$$

für alle $\phi \in C_p(Z)$ gilt.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass f injektiv ist, und betrachten eine offene Teilmenge $W = \bigcap_{x \in K} \pi_x^{-1}(U_x) \cap C_p(X)$, wobei $K \subset X$ endlich und U_x offen sind, $x \in K$. Seien $a_x \in U_x$, $x \in K$, und $\phi \in C_p(Z)$, sodass $\phi(f(x)) = a_x$ für alle $x \in K$. Solche ϕ existiert, weil $f(x_0) \neq f(x_1)$ für unterschiedliche $x_0, x_1 \in K$ und Z vollständig-regulär ist. Solche Auswahl von ϕ gibt uns

$$f^{\#}(\phi)(x) = \phi(f(x)) = a_x$$

für alle $x \in K$, was $f^{\#}(\phi) \in W$ und somit $f^{\#}[C_p(Z)] \cap W \neq \emptyset$ impliziert. Deshalb liegt $f^{\#}[C_p(Z)]$ dicht in $C_p(X)$.

(iii). Aus dem Hilfssatz 1.2.4 ergibt sich, dass $f^{\#}$ ein Homeomorphismus von $\mathbb{R}^Z$ auf den abgeschlossenen Teilraum $f^{\#}[\mathbb{R}^Z]$ von $\mathbb{R}^X$ ist. Also ist $f^{\#} \upharpoonright C_p(Z)$ ein Homeomorphismus genau dann, wenn $f^{\#}[C_p(Z)] = C_p(X)$. $\square$

Hilfssatz 1.2.5(i) könnte etwas verallgemeinert werden:

Hilfssatz 1.2.6. *Seien $f_0 : X \to Z_0$ und $f_1 : X \to Z_1$ surjektive Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Z_0 bzw. X und Z_1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $f_0^{\#}[C_p(Z_0)] \subset f_1^{\#}[C_p(Z_1)]$.

(ii) *Es gibt eine stetige $h : Z_1 \to Z_0$, sodass $f_0 = h \circ f_1$, d.h., das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr, "f_1"'] & Z_0 \\ & Z_1. \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$. Sei $\phi_0 \in C_p(Z_0)$. Dann gilt:

$$f_0^{\#}(\phi_0) = \phi_0 \circ f_0 = \phi_0 \circ h \circ f_1 = f_1^{\#}(\phi_0 \circ h) \in f_1^{\#}[C_p(Z_1)],$$

die letztere Inklusion ergibt sich aus der Stetigkeit von h.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Zuerst beweisen wir das folgende

Lemma 1.2.7. *Seien $x \in X$ und $A \subset X$ mit $f_1(x) \in \overline{f_1[A]}$. Dann $f_0(x) \in \overline{f_0[A]}$.*

Beweis. Wenn $f_0(x) \notin \overline{f_0[A]}$, dann gibt es $\phi_0 \in C_p(Z_0)$, für die gilt $\phi_0(f_0(x)) = 1$ und $\phi_0 \upharpoonright \overline{f_0[A]} \equiv 0$. Aus (i) folgt, dass es eine $\phi_1 \in C_p(Z_1)$ mit

$$f_1^{\#}(\phi_1) = \phi_1 \circ f_1 = f_0^{\#}(\phi_0) = \phi_0 \circ f_0$$

gibt. Daraus folgt $\phi_1(f_1(x)) = \phi_0(f_0(x)) = 1$ und

$$\phi_1 \upharpoonright \overline{f_1[A]} = (\phi_1 \circ f_1) \upharpoonright \overline{A} = (\phi_0 \circ f_0) \upharpoonright \overline{A} \equiv 0,$$

im Widerspruch zur Stetigkeit von ϕ_1 und $f_1(x) \in \overline{f_1[A]}$. □

Wir brauchen noch ein unterstützendes

Lemma 1.2.8. *$f_1^{-1}(f_1(x)) \subset f_0^{-1}(f_0(x))$ für jeden Punkt $x \in X$.*

Beweis. Nehmen wir $x' \in f_1^{-1}(f_1(x))$ und wenden Lemma 1.2.7 auf x' und $A = \{x\}$ an (wir haben $f_1(x') = f_1(x) \in f_1[A] \subset \overline{f_1[A]}$):

$$f_0(x') \in \overline{f_0[A]} = \overline{\{f_0(x)\}} = \{f_0(x)\},$$

und deshalb $f_0(x') = f_0(x)$ und schließlich gilt $x' \in f_0^{-1}(f_0(x))$. □

Endlich können wir den Beweis von $(i) \Rightarrow (ii)$ vervollständigen. Das Lemma 1.2.8 erlaubt uns die gesuchte Abbildung h zu definieren: $h(z) = f_0(f_1^{-1}(z))$ für alle $z \in Z_1$. Dann gilt $h(f_1(x)) = f_0(f_1^{-1}(f_1(x))) = f_0(x)$ für alle $x \in X$, was $h \circ f_1 = f_0$ impliziert.

Es bleibt zu zeigen, dass h stetig ist. Seien $B \subset Z_1$ und $z_1 \in \bar{B}$. Wir setzen nun $A = f_1^{-1}[B]$ und nehmen $x \in f_1^{-1}(z_1)$. Dann gilt $f_1(x) = z_1 \in \bar{B} = \overline{f_1[A]}$, was nach dem Lemma 1.2.7 $f_0(x) \in \overline{f_0[A]}$ impliziert. Das heißt, $h(f_1(x)) \in \overline{h[f_1[A]]}$, also

$$h(z_1) \in \overline{h[B]}, \tag{1.1}$$

weil $z_1 = f_1(x)$ und $B = f_1[A]$. Die Inklusion in (1.1) ist äquivalent zur Stetigkeit von h. □

Hilfssatz 1.2.5(i) folgt aus Hilfssatz 1.2.6: seien $Z_1 = X$ und $f_1 = \mathrm{id}_X$. Dann besagt Hilfssatz 1.2.6(i), dass $f_0^{\#}[C_p(Z_0)] \subset f_1^{\#}[C_p(Z_1)] = C_p(X)$, und Hilfssatz 1.2.6($ii$) ergibt nichts Anderes, als die Stetigkeit von f_0 (weil f_0 in diesem speziellen Fall gleich h sein muss).

1.3 Kanonische Einbettung von X in $C_p(C_p(X))$

In diesem Abschnitt sammeln wir Fakten über die kanonische Einbettung von X in $C_p(C_p(X))$ und die Eigenschaften der linearen Hülle von X in $C_p(C_p(X))$. Diese Fakten könnten, z. B., in [3, Ch. 0, § 4 und § 5] gefunden werden, allerdings teilen wir hier mehr Details mit.

Definition 1.3.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$ heißt *regulär*, wenn es für alle $x \in X$ und $A \subset X$ mit $x \notin \bar{A}$ es $f \in \mathcal{F}$ gibt, sodass $f(x) \notin \overline{f[X]}$.

Jeder Punkt $x \in X$ definiert durch die Abbildungsvorschrift $g_x(f) := f(x)$ eine Funktion von $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}$.

Die Funktion $\psi_{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$, $\psi_{\mathcal{F}} : x \mapsto g_x$, wird oft *kanonische Auswertungsabbildung von X in $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$* genannt. □

Hilfssatz 1.3.2. *Die Funktion $g_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn $\mathcal{F}$ mit der von $\mathbb{R}^X$ vererbten Unterraumtopologie versehen ist.*

Ist X ein topologischer Raum, so ist die Funktion $\psi_{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ stetig, wenn $\mathcal{F} \subset C_p(X)$ und $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ mit der Produkttopologie versehen ist.

Beweis. g_x ist die Einschränkung auf $\mathcal{F}$ der Projektionsabbildung $\pi_x : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ und die letztere ist nach der Definition der Produkttopologie stetig. Einschränkungen stetiger Abbildungen sind stetig.

Sei nun $W = \bigcap_{f \in \mathcal{F}_0} \pi_f^{-1}(U_f)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$, wobei $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ endlich, $p_f : \mathbb{R}^{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ die Projektionsabbildung und $U_f \subset \mathbb{R}$ offen ist. Dann gilt:

$$\psi_{\mathcal{F}}^{-1}[W] = \big\{x \in X \ : \ \forall f \in \mathcal{F}_0 \, (f(x) \in U_f)\big\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}_0} f^{-1}[U_f],$$

und die letztere Durchschnittsmenge ist offen, weil alle $f \in \mathcal{F}_0$ stetig sind. □

Im Folgenden werden wir immer $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$ als Teilraum von $\mathbb{R}^X$ betrachten. So ergibt sich aus dem Hilfssatz 1.3.2, dass das Bild der kanonischen Auswertungsabbildung $\psi_\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $C(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}^\mathcal{F}$ ist.

Hilfssatz 1.3.3. *Ist $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$ regulär und besteht aus stetigen Funktionen, so ist die kanonische Auswertungsabbildung $\psi_\mathcal{F}$ ein Homeomorphismus von X auf das Bild $\psi_\mathcal{F}[X] = \{g_x : x \in X\}$, versehen mit der von $\mathbb{R}^\mathcal{F}$ vererbten Unterraumtopologie.*

Beweis. $\psi_\mathcal{F}$ ist stetig nach dem Hilfssatz 1.3.2.

Da X vollständig-regulär und daher ein T_1-Raum ist, sind Einermengen $\{x\}$, $x \in X$, abgeschlossen, daher gilt $x_0 \notin \overline{\{x_1\}}$ für alle $x_0 \neq x_1 \in X$. Für solche x_0, x_1 ergibt sich aus der Regularität von $\mathcal{F}$ eine Funktion $f \in \mathcal{F}$, sodass

$$f(x_0) \notin \overline{\{f(x_1)\}} = \{f(x_1)\}.$$

Das ist aber äquivalent dazu, dass $f(x_0) \neq f(x_1)$, oder $g_{x_0}(f) \neq g_{x_1}(f)$, was $g_{x_0} \neq g_{x_1}$ impliziert. Also ist $\psi_\mathcal{F}$ injektiv.

Sei nun $U \subset X$ offen, $x \in U$ und $f \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $f(x) \notin \overline{f[X \setminus U]}$. Dann gibt es $a > 0$, sodass $(f(x) - a, f(x) + a) \cap f[X \setminus U] = \emptyset$. Es bleibt einzusehen, dass für

$$W := \pi_f^{-1}(f(x) - a, f(x) + a) = \left\{g \in \mathbb{R}^\mathcal{F} : g(f) \in (f(x) - a, f(x) + a)\right\}$$

folgendes gilt:

$$g_x \in W \cap \psi_\mathcal{F}[X] \subset \psi_\mathcal{F}[U].$$

Tatsächlich folgt die erste Inklusion aus $g_x(f) = f(x) \in (f(x) - a, f(x) + a)$. Um die zweite zu beweisen, nehmen wir $g_{x'} \in W$ und beweisen, dass $x' \in U$: Sonst hätten wir $g_{x'}(f) = f(x') \in f[X \setminus U]$, was $g_{x'} \notin W$ ergäbe, weil $(f(x) - a, f(x) + a) \cap f[X \setminus U] = \emptyset$. □

Anmerkung 1.3.4. Aus dem Hilfssatz 1.3.2 ergibt sich, dass das Bild $\psi_\mathcal{F}[X] = \{g_x : x \in X\}$, versehen mit der im Hilfssatz 1.3.3 betrachteten Topologie, ein Teilraum von $C_p(\mathcal{F})$ ist. Also ist $\psi_\mathcal{F}$ ein Homeomorphismus von X auf einen Teilraum von $C_p(\mathcal{F})$, sobald $\mathcal{F} \subset C_p(X)$ regulär ist. □

Wir werden überwiegend mit der folgenden regulären Menge von Funktionen arbeiten:

Beispiel 1.3.5. $C_p(X) \subset \mathbb{R}^X$ ist regulär für jeden vollständig-regulären Raum X. Genau so ist $\{f \in C_p(X) : f[X] \subset [0, 1]\}$ regulär für jeden vollständig-regulären Raum X. □.

Definition 1.3.6. Aus der Anmerkung 1.3.4 folgt, dass die kanonische Auswertungsabbildung

$$\psi_{C_p(X)} : X \to C_p(C_p(X)) \subset \mathbb{R}^{C_p(X)}$$

ein Homeomorphismus von X auf sein Bild $\psi_{C_p(X)}[X]$ ist. Dieser Homeomorphismus heißt *kanonische Einbettung von X in $C_p(C_p(X))$*. Im Folgenden identifizieren wir jeden Punkt $x \in X$ mit seinem Bild $g_x = \psi_{C_p(X)}(x) \in C_p(C_p(X))$.

Die lineare Hülle von X in $C_p(C_p(X))$, also

$$\big\{\alpha_0 \cdot x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot x_{n-1} \mid n \in \omega, n \geq 1, x_0, \ldots, x_{n-1} \in X, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}\big\},$$

bezeichnen wir mit $L_p(X)$. □

Jeder $x \in X \subset C_p(C_p(X))$ ist eine lineare Funktion von $C_p(X)$ nach $\mathbb{R}$: Es gilt offensichtlich

$$x(\lambda_0 \cdot f_0 + \lambda_1 \cdot f_1) = (\lambda_0 \cdot f_0 + \lambda_1 \cdot f_1)(x) = (\lambda_0 \cdot f_0)(x) + (\lambda_1 \cdot f_1)(x) =$$
$$= \lambda_0 \cdot f_0(x) + \lambda_1 \cdot f_1(x) = \lambda_0 \cdot x(f_0) + \lambda_1 \cdot x(f_1)$$

für alle $f_0, f_1 \in C_p(X)$ und $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Daher sind eigentlich alle Elemente von $L_p(X)$ lineare Funktionen von $C_p(X)$ nach $\mathbb{R}$. Das folgende Lemma besagt, dass die Umkehrung auch gilt.

Lemma 1.3.7. *Sei $\phi \in C_p(C_p(X))$ eine lineare Funktion. Dann gibt es $n \in \omega, n \geq 1$, $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$, und $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\phi = \alpha_0 \cdot x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot x_{n-1}.$$

Beweis. Da ϕ linear ist, gilt $\phi(0) = 0$, und daher gibt es eine offene Umgebung W von $0 \in C_p(X)$ mit $\phi[W] \subset (-1, 1)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass W eine basische Umgebung von 0 ist, also $W = \bigcap_{x\in K} \pi_x^{-1}(-a, a)$, wobei $a > 0$ und K eine endliche Teilmenge von X ist.

Zuerst zeigen wir, dass $\phi(f) = 0$ für alle $f \in C_p(X)$ mit $f \restriction K \equiv 0$. Wenn $\phi(f) \neq 0$, dann

$$\phi(\frac{f}{\phi(f)}) = \frac{\phi(f)}{\phi(f)} = 1 \notin (-1, 1),$$

obwohl $\frac{f}{\phi(f)} \restriction K \equiv 0$ und daher $\frac{f}{\phi(f)} \in W$, und dies im Widerspruch zur $\phi[W] \subset (-1, 1)$ steht.

Für jeden $x \in X$ sei $f_x \in C_p(X)$, sodass $f_x(x) = 1$ und $f_x \restriction (K \setminus \{x\}) \equiv 0$. Es reicht zu zeigen, dass für $\lambda_x := \phi(f_x)$ gilt

$$\phi(f) = \sum_{x \in K} \lambda_x \cdot f(x) = \sum_{x \in K} \lambda_x \cdot x(f),$$

wobei $f \in C_p(X)$ beliebig ist. Tatsächlich, für

$$g := f - \sum_{x \in K} f(x) \cdot f_x$$

und für alle $x \in K$ gilt

$$g(x) = (f - \sum_{x' \in K} f(x') \cdot f_{x'})(x) = f(x) - \sum_{x' \in K, x' \neq x} f(x') \cdot f_{x'}(x) - f(x) \cdot f_x(x) =$$
$$= f(x) - f(x) \cdot 1 = 0,$$

was $\phi(g) = 0$ ergibt. Also gilt

$$0 = \phi(f - \sum_{x \in K} f(x) \cdot f_x) = \phi(f) - \sum_{x \in K} f(x) \cdot \phi(f_x) = \phi(f) - \sum_{x \in K} \lambda_x \cdot f(x) =$$
$$= \phi(f) - \sum_{x \in K} \lambda_x \cdot x(f),$$

was $\phi = \sum_{x \in K} \lambda_x \cdot x$ impliziert. □

Definition 1.3.8. Zu einem topologischen Vektorraum V über $\mathbb{R}$ bezeichnet V' den zu V gehörigen *topologischen Dualraum*, das heißt die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ($\equiv$ mit der Unterraumtopologie von $C_p(V)$). Nach dem Lemma 1.3.7 ist $L_p(X)$ der topologische Dualraum von $C_p(X)$, d.h., $L_p(X) = C_p(X)'$. □

Hilfssatz 1.3.9. *Für einen vollständig-regulären Raum X gilt:*

(i) X ist abgeschlossen in $L_p(X)$;

(ii) $L_p(X)$ ist abgeschlossen in $C_p(C_p(X))$; und deshalb

(iii) X ist abgeschlossen in $C_p(C_p(X))$.

Beweis. (i). Sei $\bar{X}$ der Abschluss von X in $L_p(X)$. Angenommen, es gibt $y \in \bar{X} \setminus X$. Seien $n \in \omega, n \geq 1$, $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$, und $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, sodass $y = \alpha_0 \cdot x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot x_{n-1}$.

Wir betrachten nun den Raum $Y = X \cup \{y\}$, versehen mit der Unterraumtopologie von $L_p(X) \subset C_p(C_p(X))$. Es gibt $\phi \in C_p(Y)$, sodass $\phi(y) = 1$ und $\phi \restriction \{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \equiv 0$. Dann für $f := \phi \restriction X \in C_p(X)$ gilt

$$y(f) = (\alpha_0 \cdot x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot x_{n-1})(f) = \alpha_0 \cdot f(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot f(x_{n-1}) = 0.$$

Sei $U = f^{-1}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) =\subset \phi^{-1}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset X$. Dann ist $y \in \overline{X \setminus U}$, wobei der Abschluss in Y berechnet ist: $y \in \bar{X}$ und $y \notin \bar{U}$. Aus $x(f) = f(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \in X \setminus U$ ergibt sich $y(f) \geq \frac{1}{2}$ (weil die Abbildung $z \mapsto z(f)$ von $L_p(X)$ nach $\mathbb{R}$ stetig ist), im Widerspruch zur oben bewiesenen Gleichung $y(f) = 0$.

(ii). Nach dem Lemma 1.3.7 besteht $L_p(X)$ aus allen linearen Funktionen in $C_p(C_p(X))$. Da jede Funktion im Abschluss einer Menge linearer Funktionen $A \subset C_p(C_p(X))$ wieder linear ist, ist $L_p(X)$ abgeschlossen in $C_p(C_p(X))$.

(iii) ergibt sich unmittelbar aus (i) und (ii). □

1.4 Sätze von Okunev und Nagata

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es *nicht* homöomorphe Räume X und Y gibt, für die $C_p(X)$ und $C_p(Y)$ homöomorph sind; Unter einer zusätzlichen Voraussetzung ist eine solche Situation allerdings nicht mehr möglich. Diese Fakten könnten, z. B., in [3, Ch. 0, § 4 und § 6] gefunden werden, allerdings liefern wir mehr Details. Der folgende Satz wurde zuerst von Okunev in seinem Vortrag [24] erwähnt.

Satz 1.4.1. *Ist X gleich einem Produkt $Y \times \mathbb{R}$, so gibt es einen linearen Homeomorphismus $\eta : C_p(X)^\omega \to C_p(X)$.*

Beweis. Sei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen mit der diskreten Topologie und $X_0 := Y \times \mathbb{Z} \subset X$. Sei $\lfloor r \rfloor$ die Abrundungsfunktion, die jeder reellen Zahl r die nächstliegende, nicht größere ganze Zahl zuordnet, und $\langle r \rangle = r - \lfloor r \rfloor$. Für jeden $x = (y, r) \in X$ bezeichnen wir $(y, \lfloor r \rfloor)$ bzw. $(y, \lfloor r \rfloor + 1)$ mit x^- bzw. x^+. Für jede Funktion $f \in C_p(X_0)$ durch

$$\theta(f)(y, r) = (1 - \langle r \rangle) \cdot f(x^-) + \langle r \rangle \cdot f(x^+)$$

definieren wir eine Erweiterung von f auf X: Wenn $x \in X_0$ ($\equiv\ r \in \mathbb{Z}$), dann $\langle r\rangle = 0$ und daher $\theta(f)(y,r) = f(x^-) = f(x)$. Es ist leicht einzusehen, dass $\theta(f) \in C_p(X)$ und $\theta : C_p(X_0) \to C_p(X)$ linear ist. θ ist auch stetig: Sei $x = (y,r) \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann ist die Menge

$$W := \big\{f \in C_p(X_0)\ :\ \theta(f)(x) \in (-\epsilon,\epsilon)\big\} =$$
$$= \big\{f \in C_p(X_0)\ :\ (1-\langle r\rangle)\cdot f(y,\lfloor r\rfloor) + \langle r\rangle \cdot f(y,\lfloor r\rfloor + 1) \in (-\epsilon,\epsilon)\big\}$$

in $C_p(X_0)$ offen, weil für jede Funktion $f \in W$ und

$$\delta := \min\big\{|(1-\langle r\rangle)\cdot f(y,\lfloor r\rfloor) + \langle r\rangle \cdot f(y,\lfloor r\rfloor+1) + \epsilon|;$$
$$|(1-\langle r\rangle)\cdot f(y,\lfloor r\rfloor) + \langle r\rangle \cdot f(y,\lfloor r\rfloor+1) - \epsilon|\big\}$$

gilt: $h \in W$ für alle $h \in C_p(X_0)$ mit

$$\big|h(y,\lfloor r\rfloor - f(y,\lfloor r\rfloor\big|,\ \big|h(y,\lfloor r\rfloor+1) - f(y,\lfloor r\rfloor+1)\big| < \frac{\delta}{2}.$$

Somit ist $\theta : C_p(X_0) \to C_p(X)$ eine stetige lineare Transformation, die jede stetige $f \in C_p(X_0)$ auf X erweitert.

Sei $V = \{g \in C_p(X) : g \restriction X_0 \equiv 0\}$. Dann ist die Abbildung $\nu : C_p(X_0)\times V \to C_p(X)$, $\nu : (f,g) = \theta(f) + g$, ein linearer Homeomorphismus: ν ist offensichtlich stetig. Wenn

$$\nu(f_0,g_0) = \theta(f_0) + g_0 = \theta(f_1) + g_1 = \nu(f_1,g_1),$$

dann gilt $\theta(f_0 - f_1) = g_1 - g_0$, und daher

$$f_0 - f_1 = \theta(f_0 - f_1)\restriction X_0 = (g_1 - g_0)\restriction X_0 \equiv 0,$$

und schließlich $0 \equiv \theta(f_0 - f_1) = g_1 - g_0$. Somit ist ν injektiv. Für jede Funktion $h \in C_p(X)$ gilt

$$\nu(h\restriction X_0, h - \theta(h\restriction X_0)) = \theta(h\restriction X_0) + (h - \theta(h\restriction X_0)) = h,$$

und somit ist ν surjektiv. Die obere Formel impliziert, dass $\nu^{-1}(h) = (h\restriction X_0, h - \theta(h\restriction X_0)$, was auch die Stetigkeit von ν^{-1} ergibt.

Da X_0 eine direkte Summe von abzählbar vielen Kopien von Y ist, haben wir

$$C_p(X_0) \overset{lh}{\cong} C_p(Y)^\omega \overset{lh}{\cong} (C_p(Y)^\omega)^\omega \overset{lh}{\cong} C_p(X)^\omega, \tag{1.2}$$

wobei $\stackrel{lh}{\cong}$ "linear homöomorph" bedeutet. Der Vektorraum V ist kanonisch linear homöomorph zum Produkt $\prod_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, wobei

$$V_n = \big\{g \in C_p(Y \times [n, n+1]) \ : \ g \restriction (Y \times \{n\}) \equiv 0 \text{ und } g \restriction (Y \times \{n+1\}) \equiv 0\big\}.$$

Da die Vektorräume V_n, $n \in \mathbb{Z}$, paarweise linear homöomorph sind (zum Beispiel ist die Abbildung $V_n \ni g \mapsto g' \in V_m,\ \ g'(y,k) = g(y, k + (m-n))$, ein linearer Homeomorphismus), gilt

$$V \ \stackrel{lh}{\cong} \ \prod_{n\in\mathbb{Z}} V_n \ \stackrel{lh}{\cong} \ V_0^\omega \ \stackrel{lh}{\cong} \ (V_0^\omega)^\omega \ \stackrel{lh}{\cong} \ V^\omega \tag{1.3}$$

Aus den Gleichungen (1.2) und (1.3) ergibt sich

$$C_p(X) \ \stackrel{lh}{\cong} \ C_p(X_0) \times V \ \stackrel{lh}{\cong} \ C_p(X_0)^\omega \times V^\omega \ \stackrel{lh}{\cong} \ (C_p(X_0) \times V)^\omega \ \stackrel{lh}{\cong} \ C_p(X)^\omega.$$

□

Folgerung 1.4.2. $C_p(\mathbb{R}) \stackrel{\mathrm{lh}}{\cong} C_p(\mathbb{R})^\omega \stackrel{\mathrm{lh}}{\cong} C_p(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})$, *obwohl* $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ *nicht homöomorph sind.*

Beweis. Der erste Teil folgt aus dem Satz 1.4.1. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ sind nicht homöomorph, weil $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist und $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ nicht. □

Definition 1.4.3. Ein *topologischer Ring* ist ein Ring $(R, +, \cdot)$ samt einer Topologie τ auf der Grundmenge R, sodass $+ : R \times R \to R$, $- : R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$ stetig sind. Die ersten zwei Bedingungen bedeuten, dass $(R, +, \tau)$ eine topologische Gruppe ist. □

Anmerkung 1.4.4. In der Regel erhält man eine Topologie auf einem (kommutativen) Ring R, indem man eine gegenüber endlichen Schnitten abgeschlossene Familie $\mathcal{B}$ der Nullumgebungen definiert, und setzt

$$\mathcal{B}_x := \big\{x + U = \{x + r : r \in U\} \ : \ U \in \mathcal{B}\big\},$$

wobei $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis für x bezeichnet. In diesem Fall können wir die Stetigkeit von $+ : R \times R \to R$ und $- : R \to R$ allein mit Nullumgebungen charakterisieren (siehe, z.B., [12]): $+ : R \times R \to R$ und $- : R \to R$ sind genau dann stetig, wenn

$$\forall U \in \mathcal{B}\ \exists V \in \mathcal{B}\ \big(V - V := \{r_0 - r_1 : r_0, r_1 \in V\} \subset U\big). \tag{1.4}$$

gilt. Tatsächlich, wenn + und − stetig sind, dann so ist auch die Abbildung $R \times R \ni (r_0, r_1) \mapsto r_0 - r_1 \in R$ als eine Hintereinanderausführung deren. Die Stetigkeit dieser Funktion in $(0,0)$ ist äquivalent zu (1.4).

Für die Umkehrung nehmen wir eine offene Umgebung U von $-r$. Dann ist $r + U \in \mathcal{B}$, und daher gibt es $V \in \mathcal{B}$, sodass $V - V \subset r + U$ gilt. Insbesondere $0 - V = -V \subset r + U$, was $-r - V = -(r + V) \subset U$ ergibt und somit die Stetigkeit von "$-$" beweist. Da "$-$" eine Bijektion ist, die ihrer Umkehrfunktion gleich ist, ist "$-$" ein Homeomorphismus von R nach R. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $-V \in \mathcal{B}$ für alle $V \in \mathcal{B}$ gilt. Deswegen impliziert (1.4) auch

$$\forall U \in \mathcal{B}\, \exists W \in \mathcal{B}\, \big(W + W \subset U\big),$$

wir könnten, z. B., die Umgebung V aus (1.4) nehmen und $W := V \cap (-V)$ setzen. Sei nun U eine offene Umgebung von $r_0 + r_1$. Dann gilt $-(r_0 + r_1) + U \in \mathcal{B}$, daher gibt es $W \in \mathcal{B}$ mit $W + W \subset -(r_0 + r_1) + U$. Dann haben wir

$$(r_0 + r_1) + W + W = (r_0 + w) + (r_1 + W) \subset U,$$

was die Stetigkeit von "$+$" beweist.

Die Multiplikation ist genau dann stetig, wenn es für jede Umgebung $U \in \mathcal{B}$ von $r_0 r_1 \in R$ Umgebungen $V_0 \ni r_0$, $V_1 \ni r_1$ gibt, sodass $V_0 \cdot V_1 = \{x_0 \cdot x_1 : x_0 \in V_0, x_1 \in V_1\} \subset U$ gilt.

Die Linksmultiplikation mit einem festen Element $c \in R$, also die Abbildung $R \ni r \mapsto cr \in R$, ist genau dann stetig, wenn es für jede Umgebung $U \in \mathcal{B}$ eine Umgebung $V \in \mathcal{B}$ gibt, sodass $cV := \{cr : r \in V\} \subset U$ gilt. Genauso lässt sich auch die Stetigkeit der Rechtsmultiplikation mit $c \in R$ charakterisieren: $\forall U \in \mathcal{B} \exists V \in \mathcal{B}(Vc = \{rc : r \in V\} \subset U)$. Im Fall eines kommutativen Ringes sind die beiden Bedingungen offensichtlich gleichwertig. Die Stetigkeit von $\cdot : R \times R \to R$ ist nicht äquivalent zur Disjunktion der Stetigkeiten von Rechts- und Linksmultiplikationen, das entsprechende Beispiel ist aber für unsere Zwecke irrelevant. □

Beispiel 1.4.5. $C_p(X)$ ist mit der punktweisen Addition und punktweisem Produkt ein topologischer Ring. □

Definition 1.4.6. Topologische Ringe R_0, R_1 heißen *topologisch isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $\phi : R_0 \to R_1$ gibt, der gleichzeitig ein Homeomorphismus ist. Solche Abbildungen ϕ heißen *topologische Isomorphismen.* □

Der folgende Satz wurde in [22] bewiesen.

Satz 1.4.7. *Seien X, Y vollständig-reguläre Räume. Sind $C_p(X)$ und $C_p(Y)$ topologisch isomorph, so sind X und Y homöomorph.*

Beweis. In diesem Beweis nennen wir eine Abbildung $\phi : C_p(X) \to \mathbb{R}$ *multiplikativ*, wenn $\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$ für alle $f, g \in C_p(X)$ gilt, wobei $f \cdot g$ das punktweise Produkt von f, g bezeichnet. Sei X_1 die Familie aller $\phi \in L_p(X) \setminus \{0\}$, die multiplikativ sind. Es gilt $X \subset X_1$: $x(f \cdot g) = (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = x(f)x(g)$. Jeder topologische Isomorphismus $\theta : C_p(X) \to C_p(Y)$ erzeugt einen Homeomorphismus θ_1 zwischen X_1 und Y_1:

$$\theta_1(\phi)(h) := \phi(\theta^{-1}(h)),$$

wobei $\phi \in X_1$ und $h \in C_p(X)$. Daher reicht es zu zeigen, dass $X_1 = X$.

Sei $\phi \in X_1$. Da $\phi \neq 0$, es gibt $n \in \omega, n \geq 1$, $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$, und $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, sodass $\phi = \alpha_0 \cdot x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot x_{n-1}$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, und $\alpha_i \neq 0$ für $i < n$. Es gibt zwei Möglichkeiten.

1. $n > 1$. Nehmen wir $h_0, h_1 \in C_p(X)$, sodass $h_i(x_i) = \frac{1}{\alpha_i}$ und $f_i(x_j) = 0$ für alle $i \in \{0, 1\}$ und $j \neq i$. Dann haben wir

$$\phi(h_i) = (\alpha_0 \cdot x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot x_{n-1})(h_i) = \alpha_0 \cdot h_i(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot h_i(x_{n-1}) = \\ = \alpha_i h_i(x_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i} = 1,$$

wobei $i \in \{0, 1\}$. Auf der anderen Seite gilt

$$\phi(h_0 \cdot h_1) = (\alpha_0 \cdot x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot x_{n-1})(h_0 \cdot h_1) = \\ = \alpha_0 \cdot (h_0 \cdot h_1)(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot (h_0 \cdot h_1)(x_{n-1}) = \alpha_0(h_0 \cdot h_1)(x_0) + \alpha_1(h_0 \cdot h_1)(x_1) = 0,$$

was zu $\phi(h_0 \cdot h_1) = \phi(h_0) \cdot \phi(h_1) = 1 \cdot 1 = 1$ in Widerspruch steht.

2. $n = 1$, also $\phi = \alpha_0 x_0$. Dann für $C_p(X) \ni h \equiv 1$ gilt $h \cdot h = h$, was $\phi(h) = \phi(h \cdot h) = \phi(h)^2$ und somit $\phi(h) \in \{0, 1\}$ ergibt. Auf der anderen Seite gilt $\phi(h) = \alpha_0 x_0(h) = \alpha_0 h(x_0) = \alpha_0$. Aus $\alpha_0 \neq 0$ ergibt sich $\alpha_0 = 1$, also $\phi = x_0 \in X$. □

Der obere Satz ergänzt den Satz 1.4.1 samt der Folgerung 1.4.2, weil jeder topologische Isomorphismus ϕ der Ringe $C_p(X), C_p(Y)$ ein linearer Homeomorphismus ist. Tatsächlich, für jede natürliche Zahl $n > 0$ und $f \in C_p(X)$ gilt

$$\phi(nf) = \phi(\underbrace{f + \cdots + f}_{n \text{ Mal}}) = \underbrace{\phi(f) + \cdots + \phi(f)}_{n \text{ Mal}} = n\phi(f).$$

Sei nun auch $m \in \omega$, $m > 0$. Dann für $g = \frac{nf}{m}$ haben wir

$$n\phi(f) = \phi(nf) = \phi(mg) = m\phi(g),$$

und daher $\phi(g) = \phi(\frac{nf}{m}) = \frac{n}{m}\phi(f)$. Aus der Stetigkeit von ϕ ergibt sich nun $\phi(\alpha f) = \alpha\phi(f)$ für alle $\alpha \geq 0$, und somit auch für negative α, weil $\phi(-f) = \phi(f)$.

Für kompakte Räume X kann man die Topologie von X direkt aus der algebraischen Struktur von $C_p(X)$ gewinnen (siehe [28, Theorem 7.7.1] oder [26, Satz. 15.9], wo man einen in sich abgeschlossenen Beweis findet):

Satz 1.4.8. *Zwei kompakte Hausdorff-Räume X und Y sind genau dann homöomorph, wenn die Ringe $C_p(X)$ und $C_p(Y)$ isomorph sind.*

Kapitel 2

Überdeckungseigenschaften und Mengenwertige Abbildungen

2.1 Ordinal- und Kardinalzahlen

Hier sammeln wir grundlegende Fakten und Definitionen in Bezug auf Ordinal- und Kardinalzahlen. Diese kommen in der Regel als Hilfsmittel in Vorlesungen über Topologie vor, wir beschreiben daher keine Beweise. Vielmehr wollen wir entsprechende Bezeichnungen in den kommenden Abschhnitten erklären. Unsere Darstellung folgt [20, Kapitel 9].

Definition 2.1.1.

- Sei R eine Relation auf einer Menge A. Ein Tupel $\langle A, R\rangle$ heißt *Wohlordnung* genau dann, wenn $\langle A, R\rangle$ eine Ordnung ist, in der jede nicht leere Teilmenge B von A ein R-minimales Element hat, das heißt

$$\forall B \subset A\big((B \neq \emptyset) \to \exists x \in B\, \forall y \in B\, (\neg y\, R\, x)\big).$$

- Eine Menge A heißt *transitiv*, wenn A elle Elemente ihrer Elemente enthält, also

$$\forall x \in A\, \forall y \in x\, (y \in A).$$

- Eine Menge X heißt *Ordinalzahl* genau dann, wenn X transitiv ist und $\langle x, \in\rangle$ eine Wohlordnung ist. □

Ist x eine Ordinalzahl und $y \in x$, so ist auch y eine Ordinalzahl.

Zu jeder Ordinalzahl α kann man ihren Nachfolger $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ definieren. So entstehen natürliche Zahlen: $0 := \emptyset$, $1 := \{0\} = S(0)$, ..., $n+1 = \{0, 1, \ldots, n\} = S(n)$, ..., die alle Ordinalzahlen sind. α heißt *Nachfolgerordinalzahl* genau dann, wenn $\alpha = S(\beta)$ für eine Ordinalzahl β. Sonst heißt α *Limesordinalzahl*. Zum Beispiel ist ω eine Limesordinalzahl (die dank dem Unendlichkeitsaxiom existiert). So ist eine Ordinalzahl α eine natürliche Zahl ($\equiv$ element von ω) genau dann, wenn alle $\beta \leq \alpha$ Nachfolger sind.

Als Nächstes präsentieren wir die Klassifikation aller Wohlordnungen bis auf Isomorphie. Im Allgemeinen sind Klassifikationsaufgaben in der Mathematik kaum möglich. Bei den Wohlordnungen wird dies nicht der Fall sein.

Definition 2.1.2. Sei $\langle A, R\rangle$ ein geordnetes Paar, $x \in A$. Die Menge $\mathrm{pred}(A, x, R) = \{y \in A : yRx\}$ heißt die *Vorgängermenge von x in $\langle A, R\rangle$*. □

Das nächste Faktum ist auch als *der Trichotomiesatz für Wohlordnungen* bekannt

Satz 2.1.3. *Seien $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ Wohlordnungen. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ *oder*

(ii) *Es gibt $x \in A$, sodass* $\mathrm{pred}(A, x, R) \cong \langle B, S\rangle$ *oder*

(iii) *Es gibt $y \in B$, sodass* $\mathrm{pred}(B, y, S) \cong \langle A, R\rangle$

Der obere Trichotomiesatz impliziert das nächste fundamentale Faktum.

Satz 2.1.4. *Sind x, y Ordinalzahlen, so gilt*

$$(x = y) \;\vee\; (x \in y) \;\vee\; (y \in x). \qquad \square$$

Die Kardinalzahlen werden in der Regel mithilfe des folgenden Satzes (Wohlordnungssatz) von Zermelo eingeführt:

Satz 2.1.5. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent dazu, dass es für jede Menge A eine Wohlordnung R auf A gibt.* □

Mithilfe der Abbildung ϕ, die jedem Element $a \in A$ die Menge $\{\phi(x) : x \in A, x\,R\,a\}$ rekursiv zuordnet (diese ϕ heißt *Mostowski-Kollaps*), beweist man

Folgerung 2.1.6. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent dazu, dass es für jedes X eine Ordinalzahl α und eine Bijektion $f : X \to \alpha$ gibt.* □

Die obere Korollar samt dem Faktum, dass es in jeder Menge von Ordinalzahlen die kleinste gibt, motiviert die folgende

Definition 2.1.7.

- Für eine Menge A sei $|A|$ die kleinste Ordinalzahl α, sodass es eine Bijektion $f : A \to \alpha$ gibt. $|A|$ heißt die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* von A.
- α ist eine *Kardinalzahl* genau dann, wenn $|\alpha| = \alpha$. Zum Beispiel ist $|A|$ eine Kardinalzahl für jede Menge A. □

Der folgende Satz wird wahrscheinlich am öftesten in Berechnungen der Mächtigkeiten in der mengentheoretischen Topologie verwendet.

Satz 2.1.8.

- $|A| = |A^n| = |A^{<\omega}|$ *für jede unendliche Menge*[1] A *und* $n \in \omega$, $n \geq 1$.
- $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$, *wobei* A, B *unendlich sind.*
- $|A| \leq |B|$ *wenn es eine surjektive Abbildung* $f : B \to A$ *(*$\equiv$ *eine injektive Abbildung* $g : A \to B$*) gibt.*

2.2 Überdeckungseigenschaften

Definition 2.2.1. Sei X ein topologischer Raum. Die *Lindelöf-Zahl* von X, $l(X)$, ist die kleinste Kardinalzahl κ sodass jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Teilüberdeckung $\mathcal{U}_0$ besitzt, deren Kardinalität $|\mathcal{U}_0|$ kleiner oder gleich κ ist.

Topologische Räume X mit $l(X) \leq \omega$ werden *Lindelöf-Räume* genannt. Anders ausgedrückt, X ist ein Lindelöf-Raum genau dann, wenn jede offene Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung besitzt. □

Das folgende Beispiel findet man in [10, S. 17].

[1] Hier $A^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} A^n$

Beispiel 2.2.2. Sei κ eine Kardinalzahl. Wenn der topologische Raum X eine Basis $\mathcal{B}$ mit $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ hat, dann ist $l(X) \leq \kappa$. Insbesondere ist jeder Raum X mit abzählbarer Basis ein Lindelöf-Raum. Tatsächlich, sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Für jede Menge $U \in \mathcal{U}$ gibt es $\mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}$ mit $U = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}_U\}$. Für jede Menge $B \in \mathcal{B}_0 := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{B}_U$ finden wir $U(B) \in \mathcal{U}$, sodass $B \in \mathcal{B}_{U(B)}$ (und daher $B \subset U(B)$). So ergibt sich

$$X = \bigcup \mathcal{U} = \bigcup\{\cup\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{U}\} = \bigcup \mathcal{B}_0 \subset \bigcup\{U(B) : B \in \mathcal{B}_0\} \subset X,$$

und deshalp ist $\{U(B) : B \in \mathcal{B}_0\}$ eine Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ mit $|\{U(B) : B \in \mathcal{B}_0\}| \leq |\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{B}| \leq \kappa$.

Topologische Räume müssen aber nicht eine Basis $\mathcal{B}$ mit Kardinalität gleich der Lindelöf-Zahl besitzen: Z.B., der Satz von Tychonoff besagt, dass $X := \{0,1\}^\kappa$ kompakt für jede Kardinalzahl κ ist (und deswegen $l(X) \leq \omega$), aber es gibt offensichtlich keine Basis $\mathcal{B}$ für X mit $|\mathcal{B}| < \kappa$. □

Wir werden uns auch mit anderen Überdeckungseigenschaften beschäftigen, die von kombinatorischer Natur sind.

Definition 2.2.3. Ein topologischer Raum X heißt *Menger-Raum* (oder, äquivalent, hat die *Überdeckungseigenschaft von Menger*), wenn für jede Folge $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ von offenen Überdeckungen von X es eine Folge $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$ gibt, sodass jede $\mathcal{V}_n$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{U}_n$ ist, und die Familie $\{\cup\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ eine Überdeckung von X ist.

Verlangt man in der oberen Definition zusätzlich, dass die Menge $\{n \in \omega : x \notin \cup\mathcal{V}_n\}$ für jedes $x \in X$ endlich ist (solche Überdeckungen heißen *γ-Überdeckungen*), so definiert man *Hurewicz-Räume* (oder, äquivalent, Räume mit *Überdeckungseigenschaft von Hurewicz.*) □

Hurewicz-Räume wurden von Hurewicz in [14] eingeführt. Die obere Definition von Menger-Räumen, die heutzutage üblich ist, wurde ebenfalls von Hurewicz eingeführt. Man verwendet den Namen "Menger-Raum", weil Hurewicz in [13] bewiesen hat, dass für Teilräume von $\mathbb{R}$ seine Eigenschaft einer anderen äquivalent ist, die von Menger in [21] betrachtet wurde.

Ein topologischer Raum heißt *σ-kompakt*, wenn er sich als abzählbare Vereinigung kompakter Teilräume schreiben lässt. Die σ-Kompaktheit ist eine natürliche Abschwächung des topologischen Begriffs der Kompaktheit. Die reellen Zahlen bilden einen nicht kompakten Raum, der σ-kompakt ist, weil $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\omega}[-n, n]$ und jedes abgeschlossene Interval kompakt ist.

Beispiel 2.2.4. Jeder σ-kompakte Raum X ist ein Hurewicz-Raum, und jeder Hurewicz-Raum ist ein Menger-Raum.

Die zweite Implikation ist offensichtlich, weil es in der Definition von Hurewicz-Räumen einfach mehr verlangt wurde, als in der von Menger-Räumen. Um die erste Implikation zu beweisen, betrachten wir einen Raum $X = \bigcup_{n\in\omega} K_n$, wobei jeder Teilraum K_n kompakt ist, und eine Folge $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega\rangle$ von offenen Überdeckungen von X. Weil eine endliche Vereinigung von kompakten Teilräumen wieder kompakt ist, für jede n findet man eine endliche Teilmenge $\mathcal{V}_n$ von $\mathcal{U}_n$, sodass gilt $\bigcup_{i\le n} K_i \subset \cup\mathcal{V}_n$. Sei $x \in X$ und $i \in \omega$, sodass $x \in K_i$. Dann für jede $n \ge i$ gilt $x \in \bigcup_{i\le n} K_i \subset \cup\mathcal{V}_n$. Somit hat X die Überdeckungseigenschaft von Hurewicz. □

Es gibt einen Hurewicz-Teilraum X von $\mathbb{R}$, der nicht σ-kompakt ist, siehe [15, Theorem 5.1]. Es gibt auch einen Menger-Teilraum X von $\mathbb{R}$, der nicht Hurewicz-Raum ist, siehe [8]. Wir werden uns aber in dieser Arbeit mit diesen Konstruktionen nicht beschäftigen.

Das nächste Lemma könnte als "Folklore" betrachtet werden.

Lemma 2.2.5. *Seien X_n, $n \in \omega$, Menger- (bzw. Hurewicz-)Teilräume von einem topologischen Raum X. Dann ist auch $Z := \bigcup_{n\in\omega} X_n$ ein Menger- (bzw. Hurewicz-)Teilraum von X.*

Beweis. Seien $\langle \mathcal{U}_m : m \in \omega\rangle$ offene Überdeckungen von Z. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass alle $\mathcal{U}_m$ aus offenen Teilmengen von X bestehen.

Zuerst werden wir den Fall von Menger-Räumen betrachten. Sei $\omega = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ eine Zerlegung, wobei jede A_n unendlich ist. Für jede n gibt es eine Folge $\langle \mathcal{V}^n_m : m \in A_n\rangle$, sodass jede $\mathcal{V}^n_m$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{U}_m$ ist, und die Familie $\{\cup\mathcal{V}^n_m : m \in A_n\}$ eine Überdeckung von X_n ist. Dann ist $\{\cup\mathcal{V}^n_m : n \in \omega, m \in A_n\}$ eine Überdeckung von $Z = \bigcup_{n\in\omega} X_n$.

Seien jetzt $\{X_n : n \in \omega\}$ Hurewicz-Räume. Für jede $n \in \omega$ gibt es eine Folge $\langle \mathcal{V}^n_m : m \in \omega\rangle$, sodass jede $\mathcal{V}^n_m$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{U}_m$ ist, und die Familie $\{\cup\mathcal{V}^n_m : m \in \omega\}$

eine γ-Überdeckung von X_n ist. Jetzt nehmen wir als $\mathcal{V}_m$ die Vereinigung $\bigcup_{n\leq m}\mathcal{V}_m^n$ und behaupten, dass $\{\cup\mathcal{V}_m : m\in\omega\}$ eine γ-Überdeckung von Z ist. Sei also $m\in\omega$ und $x\in X_m$. Da $\{\cup\mathcal{V}_m^n : m\in\omega\}$ eine γ-Überdeckung von X_n ist, gibt es eine $m_0\in\omega$ mit $x\in\cup\mathcal{V}_m^n$ für alle $m\geq m_0$. Dann für alle $m\geq\max\{m_0,n\}$ gilt $x\in\cup\mathcal{V}_m^n\subset\cup\bigcup_{i\leq m}\mathcal{V}_m^i=\cup\mathcal{V}_m$. □

Der unten definierte Baire-Raum hilft oft, die Überdeckungseigenschaften von Menger und Hurewicz besser zu verstehen.

Definition 2.2.6. Die Grundmenge des Baire-Raums ist die Menge ω^ω aller Folgen von natürlichen Zahlen. Die Topologie des Baire-Raums lässt sich als die abzählbare Produkttopologie der diskreten Topologie über ω definieren. □

Da die diskrete Topologie metrisierbar ist, ist auch der Baire-Raum metrisierbar, es lässt sich auch eine einfache Metrik konkret angeben:

$$d(x,y)=2^{-\min\{n:x(n)\neq y(n)\}}$$

wenn $x\neq y$ und $d(x,y)=0$ sonst. d ist sogar eine Ultrametrik, das heißt $d(x,z)\leq\max\{d(x,y),d(y,z)\}$ für alle $x,y,z\in\omega^\omega$. Die Vollständigkeit von $\langle\omega^\omega,d\rangle$ lässt sich analog (und sogar einfacher) zu den reellen Zahlen zeigen.

Jeder Punkt x im Baire-Raum hat die Familie aller Mengen $\{[x\restriction n] : n\in\omega\}$ als abzählbare Umgebungsbasis, wobei hier $[x\restriction n]=\{z\in\omega^\omega : x\restriction n=z\restriction n\}$; Anders ausgedrückt, $[x\restriction n]$ besteht aus allen $z\in\omega^\omega$, sodass die ersten n Stellen von z mit denen von x übereinstimmen. Dies erlaubt eine natürliche Charakterisierung der Stetigkeit einer Funktion $f:Z\to\omega^\omega$: f ist stetig in $z\in Z$ genau dann, wenn für jede $n\in\omega$ eine offene Umgebung $U\ni z$ existiert, sodass für alle $z'\in U$ gilt $f(z')\restriction n=f(z)\restriction n$.

Die folgende Relation auf ω^ω spielt eine wichtige Rolle in den Untersuchungen über die Überdeckungseigenschaften von Menger und Hurewicz:

$$x\leq^* y\overset{\text{Def.}}{\iff}\exists n_0\in\omega\,\forall n\geq n_0\,\big(x(n)\leq y(n)\big).$$

Eine Teilmenge $D\subset\omega^\omega$ heißt

- *dominierend (hinsichtlich der Relation $\leq^*$)*, wenn für jedes $x\in\omega^\omega$ es ein $d\in D$ gibt, sodass $x\leq^* d$;

- *begrenzt (hinsichtlich der Relation $\leq^*$)*, wenn es $x \in \omega^\omega$ gibt, sodass $d \leq^* x$ für alle $d \in D$.

Lemma 2.2.7. *Ein Hurewicz- bzw. Menger-Teilraum X von ω^ω ist begrenzt bzw. nicht dominierend.*

Beweis. Für jede $n, k \in \omega$ sei $U_k^n = \{x \in \omega^\omega : x(n) = k\}$. Jede U_k^n ist eine gleichzeitig offene und abgeschlossene Teilmenge von ω^ω. Wir werden die Folge $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ von offenen Überdeckungen von ω^ω (und daher auch von X) untersuchen, wobei $\mathcal{U}_n = \{U_k^n : k \in \omega\}$.

Zuerst werden wir den Fall von Menger-Räumen betrachten. Sei wieder $\omega = \bigcup_{i \in \omega} A_i$ eine Zerlegung, wobei jede A_n unendlich ist. Aus der Überdeckungseigenschaft von Menger ergibt sich unmittelbar eine Folge $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$, sodass jede $\mathcal{V}_n$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{U}_n$ ist, und für jede $i \in \omega$ die Familie $\{\cup \mathcal{V}_n : n \in A_i\}$ eine Überdeckung von X ist. Seien K_n die endliche Teilmenge von ω mit $\mathcal{V}_n = \{U_k^n : k \in K_n\}$ und $z(n) = \max K_n$. Es bleibt zu zeigen, dass $z \not\leq^* x$ (äquivalent: die Menge $J = \{n \in \omega : x(n) \leq z(n)\}$ is unendlich) für alle $x \in X$ gilt. Wir zeigen, dass $J \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \omega$. Sei also $n \in A_i$ mit $x \in \cup \mathcal{V}_n = \bigcup_{k \in K_n} U_k^n$. Dann gilt $x(n) \in K_n$, also gilt $x(n) \leq \max K_n = z(n)$, und daher $n \in J \cap A_i$. Damit ist der "Menger-Teil" bewiesen.

Nun betrachten wir den Fall von Hurewicz-Räumen. Aus der Überdeckungseigenschaft von Hurewicz ergibt sich unmittelbar eine Folge $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$, sodass jede $\mathcal{V}_n$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{U}_n$ ist, und die Familie $\{\cup \mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ eine γ-Überdeckung von X ist. Seien wieder K_n die endliche Teilmenge von ω mit $\mathcal{V}_n = \{U_k^n : k \in K_n\}$ und $z(n) = \max K_n$. Es bleibt zu zeigen, dass $x \leq^* z$ für alle $x \in X$ gilt. Es gibt $n_0 \in \omega$ mit $x \in \cup \mathcal{V}_n$ für alle $n \geq n_0$. Dies bedeutet schließlich $x(n) \in K_n$, also gilt $x(n) \leq \max K_n = z(n)$ für alle $n \geq n_0$. $\square$

Das obere Lemma in einer anderen Form findet man schon in [14], siehe auch den nächsten Abschnitt.

2.3 Mengenwertige und (halb)stetige von oben Abbildungen

In diesem Abschnitt werden wir mengenwertige Abbildungen, also Abbildunden $\Psi : Z \to \mathcal{P}(T) = \{Y : Y \subset T\}$ (manchmal werden wir auch $\Psi : Z \Rightarrow T$ schreiben), und ihre einfache topologische Eigenschaften betrachten, wobei T, Z topologische Räume sind. Wir werden uns überwiegend mit dem Fall $T = \{0,1\}^X$ beschäftigen, wobei X eine unendliche Menge ist und $\{0,1\}^X$ mit der Produkttopologie versehen ist. Die Indikatorfunktionen liefern eine natürliche Identifizierung

$$\pi_X = \pi : \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto \chi_A \in \{0,1\}^X$$

von $\{0,1\}^X$ und der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, wobei $\chi_A(x) = 1$ wenn $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ sonst. Es ist manchmal praktischer, mit $\mathcal{P}(X)$ versehen mit der Topologie τ_0 bestehend aus Mengen $\pi^{-1}[U]$ für U offen in $\{0,1\}^X$ in der Produkttopologie zu arbeiten, anstatt direkt mit dem Raum $\{0,1\}^X$. So besteht die Basis von Umgebungen von $Y \in \mathcal{P}(X)$ aus Mengen

$$[s,t] = \{Y' \subset X : s \subset Y', t \cap Y' = \emptyset\},$$

wobei s, t endliche disjunkte Teilmengen von X sind. Aus dem Satz von Tychonoff ergibt sich, dass $\langle \mathcal{P}(X), \tau_0 \rangle$ kompakt ist, einfach weil $\{0,1\}^X$ mit der Produkttopologie so ist.

Für $A \subset X$ wird durch $\uparrow A$ die folgende Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ definiert: $\uparrow A = \{B \subset X : A \subset B\}$. Es folgt aus der Definition von τ_0, dass $\uparrow A$ abgeschlossen in $\mathcal{P}(X)$ ist: Wenn $C \notin \uparrow A$, dann gibt es $a \in A \setminus C$, und schließlich ist $[\emptyset, \{a\}]$ eine offene Umgebung von C, die zu $\uparrow A$ disjunkt ist. In der Regel werden wir mengenwertige Abbildungen $\Psi : Z \Rightarrow \mathcal{P}(X)$ verwerden, für die eine $\psi : Z \to \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ gibt, sodass $\Psi(z) = \uparrow \psi(z)$ für jedes $z \in Z$ gilt. Daher werden wir die Eigenschaften von $\uparrow A$ angehen. Zunächst wiederholen wir einige Sätze über kompakte Räume. Der nächste Satz wurde von A.D. Wallace bewiesen, siehe [10, 3.2.10].

Satz 2.3.1. *Sei A_i ein kompakter Teilraum von einem topologischen Raum X_i, $i \in I$. Für jede offene Umgebung O von $\prod_{i\in I} A_i$ in $\prod_{i\in I} X_i$ gibt es eine endliche $J \subset I$, und* *für jedes $i \in J$ eine offene Umgebung U_i von A_i in X_i, für die gilt*

$$\prod_{i \in J} U_i \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \subset O.$$

Folgerung 2.3.2. *Sei W eine offene Umgebung von $\uparrow A$ in $\mathcal{P}(X)$, wobei $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge B von A mit der Eigenschaft $\uparrow A \subset \uparrow B \subset W$.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ sei $Z_x = \{1\}$ wenn $x \in A$ und $Z_x = \{0, 1\}$ sonst. Es ist leicht zu sehen, dass $\pi[\uparrow A] = \prod_{x \in X} Z_x$. Für $O := \pi[W]$ ergibt sich aus dem Satz 2.3.1 eine endliche $B \subset X$, und für jedes $x \in B$ eine offene Umgebung U_x von Z_x in $\{0, 1\}$, sodass

$$\prod_{x \in B} U_x \times \prod_{x \in X \setminus B} \{0, 1\} \subset O.$$

Da Z_x sowieso gleich $\{0, 1\}$ für $x \notin A$ ist (und daher auch $U_x = \{0, 1\}$ für solche x), ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass $B \subset A$. Es bleibt festzuhalten, dass

$$\uparrow A \subset \uparrow B = \pi^{-1}[\prod_{x \in B} U_x \times \prod_{x \in X \setminus B} \{0, 1\}] \subset \pi^{-1}[O] = W.$$

□

Definition 2.3.3. Seien Z, T topologische Räume und $\Psi : Z \Rightarrow T$ eine mengenwertige Abbildung. Ψ heißt *kompaktwertig*, falls $\Psi(z)$ ein kompakter Teilraum von T für jedes z ist. Ψ heißt *halbstetig von oben*, wenn für jedes $z \in Z$ und jede offene Umgebung U von $\Psi(z)$ in T, es gibt eine offene in Z Menge $V \ni z$, sodass $\Psi[V] := \bigcup_{z' \in V} \Psi(z') \subset U$.

Das nächste Lemma könnte als “Folklore” betrachtet werden.

Lemma 2.3.4. *Seien Z ein kompakter Raum (bzw. Lindelöf-Raum, Menger-Raum, Hurewicz-Raum) und $\Psi : Z \Rightarrow T$ eine kompaktwertige und halbstetige von oben Abbildung. Dann ist $\Psi[Z] := \bigcup_{z \in Z} \Psi(z)$ auch ein kompakter Teilraum (bzw. Lindelöf-Teilraum, Menger-Teilraum, Hurewicz-Teilraum) von T.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $T = \Psi[Z]$ annehmen. Wir werden nur den Fall von Hurewicz-Räumen betrachten. Die anderen drei Fälle sind analog und sogar einfacher.

Sei $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ eine Folge von offenen Überdeckungen von T. Da Ψ kompaktwertig ist, für jedes $z \in Z$ und $n \in \omega$ gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{U}_{z,n}$ von $\mathcal{U}_n$, die $\Psi(z)$ überdeckt. Die Halbstetigkeit von oben gibt uns eine offene in Z Menge $V_{z,n} \ni z$ mit der Eigenschaft $\Psi[V_{z,n}] \subset \cup \mathcal{U}_{z,n}$. Die Familie $\mathcal{V}_n := \{V_{z,n} : z \in Z\}$ ist eine offene Überdeckung von Z. Da Z ein Hurewicz-Raum ist, für jede n gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{V}'_n$ von $\mathcal{V}_n$, sodass $\{\cup \mathcal{V}'_n : n \in \omega\}$ eine γ-Überdeckung von Z ist. Sei Z_n die endliche Teilmenge von Z, für die $\mathcal{V}'_n = \{V_{z,n} : z \in Z_n\}$ gilt. Es folgt $\Psi[\cup \mathcal{V}'_n] \subset \cup \mathcal{U}'_n$, wobei $\mathcal{U}'_n = \cup_{z \in Z_n} \mathcal{U}_{z,n} \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\{\cup \mathcal{U}'_n : n \in \omega\}$ eine γ-Überdeckung von T ist. Sei also $t \in T$. Es gibt $z \in Z$ mit $t \in \Psi(z)$. Es gibt $n_0 \in \omega$, sodass $z \in \cup \mathcal{V}'_n$ für alle $n \geq n_0$, weil $\{\cup \mathcal{V}'_n : n \in \omega\}$ eine γ-Überdeckung von Z ist. Dann gilt:

$$\forall n \geq n_0 \; (t \in \Psi(z) \subset \Psi[\cup \mathcal{V}'_n] \subset \cup \mathcal{U}'_n).$$

Deshalb ist $\{\cup \mathcal{U}'_n : n \in \omega\}$ eine γ-Überdeckung von T. □

Definition 2.3.5. Sei Z ein topologischer Raum und $\psi : Z \to \omega^\omega$ eine Abbildung. ψ heißt *stetig von oben*, wenn für alle $m, n \in \omega$ die Menge $\{z \in Z : \psi(z)(n) \leq m\}$ offen ist.

Stetige von oben Abbildungen wurden in unserem Kontext in [29] verwendet. Der nächste einfache Satz hilft, in einigen Anwendungen von kompaktwertigen halbstetigen von oben Abbildungen $\Psi : Z \Rightarrow \omega^\omega$ diese durch bestimmte "gewöhnliche" (einwertige) zu ersetzen.

Satz 2.3.6. *Sei $\psi : Z \to \omega^\omega$ eine stetige von oben Abbildung. Dann ist*

$$\Psi : Z \Rightarrow \omega^\omega, \quad \Psi : z \mapsto \downarrow \psi(z) := \big\{x \in \omega^\omega : \forall n \in \omega \, (x(n) \leq \psi(z)(n))\big\}$$

kompaktwertig und halbstetig von oben.

Beweis. Sei $z \in Z$ und O eine offene Umgebung von $\Psi(z)$. Da $\Psi(z)$ gleich dem Produkt endlicher Menge ist, nämlich $\prod_{n \in \omega} K_n$, wobei $K_n = \{k \in \omega : k \leq \psi(z)\}$ versehen mit diskreter Topologie, es ist kompakt. Aus dem Satz 2.3.1 ergibt sich endliche $J \subset \omega$, und für jedes $n \in J$ eine offene Umgebung U_n von K_n in ω, für die gilt $\prod_{n \in J} U_i \times \prod_{i \in \omega \setminus J} \omega \subset O$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass $U_n = K_n$ für alle $n \in J$. Aus der Stetigkeit von oben folgt, dass die Menge

$$V_n := \{z' \in Z : \psi(z')(n) \leq \psi(z)(n)\} = \{z' \in Z : \psi(z')(n) \in K_n\} \ni z$$

offen für alle $n \in J$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\Psi(z') \subset O$ für alle $z' \in \bigcap_{n \in J} V_n$. Dies sieht man wie folgt:

$$\{k \in \omega : \exists x \in \Psi(z')\ (k = x(n))\} = \{k : k \leq \psi(z')(n)\} \subset$$
$$\subset \{k : k \leq \psi(z)(n)\} = K_n = U_n$$

für alle $n \in J$, und daher $\Psi(z') \subset \prod_{n \in J} U_i \times \prod_{i \in \omega \setminus J} \omega \subset O$. □

Folgerung 2.3.7. *Sei Z ein Menger- bzw. Hurewicz-Raum und $\psi : Z \to \omega^\omega$ eine stetige von oben Abbildung. Dann ist $\psi[Z]$ nicht dominierend bzw. begrenzt.*

Beweis. Sei $\Psi : Z \Rightarrow \omega^\omega$ die mengenwertige Abbildung, die im Satz 2.3.6 definiert wurde. Derselbe Satz besagt, dass Ψ kompaktwertig und halbstetig von ist. Aus dem Lemma 2.3.4 ergibt sich nun, dass $\Psi[Z]$ ein Menger-Raum bzw. Hurewicz-Raum ist. Dann ist $\Psi[Z]$ nicht dominierend bzw. begrenzt, siehe Lemma 2.2.7. Daher ist auch $\psi[Z]$ nicht dominierend bzw. begrenzt, weil $\psi[Z] \subset \Psi[Z]$. □

Satz 2.3.6 und Folgerung 2.3.7 wurden auch in [29, § 4] erwähnt. Für stetige Funktionen wurde Folgerung 2.3.7 von Hurewicz in [14] bewiesen, siehe auch [15, Theorems 4.3, 4.4].

Kapitel 3

Dualitäten

3.1 Dualität zwischen der Lindelöf-Zahl und der Enge von Räumen

Definition 3.1.1. Sei X ein topologischer Raum. Die *Enge* von X, $t(X)$, ist die kleinste Kardinalzahl κ, sodaß für jede Teilmenge A von X und Punkt x in der Abschließung von A, es eine Teilmenge B von A mit Kardinalität $|B| \leq \kappa$ gibt, mit der Eingenschaft $x \in \bar{B}$.

Beispiel 3.1.2. Die Enge von jedem metrischen Raum $\langle X, \rho \rangle$ ist abzählbar: Sei $x \in X$ und $A \subset X$ mit $x \in \bar{A}$. Für jedes $n \in \omega$ findet man $x_n \in A$, sodass $\rho(x, x_n) \leq \frac{1}{n+1}$. Dann $B = \{x_n : n \in \omega\}$ ist eine abzählbare Teilmenge von A, die x in ihrer Abschließung enthält. □

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die Lindelöf-Zahl in gewissem Sinne dual zu der Enge via Funktionenräume ist. Die Schlussfolgerung (1) $\Rightarrow$ (2) im folgenden Satz wurde zuerst in [1] bewiesen. Wir geben hier einen anderen Beweis, der von mengenwertigen Abbildungen Gebrauch macht. Die Schlussfolgerung (2) $\Rightarrow$ (1) wurde in [25] bewiesen. Der unten präsentierte Beweis ähnelt dem in [3, S. 54], wir haben auch einige Details hinzugefügt.

Satz 3.1.3. *Sei X ein topologischer Raum und κ eine Kardinalzahl. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $l(X^n) \leq \kappa$ *für alle* $n \in \omega$, $n \geq 1$;

(2) $t(C_p(X)) \leq \kappa$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Sei $A \subset C_p(X)$ und $f \in \bar{A}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass f gleich 0 ist, sonst könnten wir $A' = A - f = \{a - f : a \in A\}$ und $f' = f - f = 0$ betrachten. Seien $m, n \geq 1$, $m, n \in \omega$. Wir betrachten die mengenwertige Abbildung

$$\Psi_{n,m} : X^n \Rightarrow \mathcal{P}(A), \quad \Psi : \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle \mapsto \uparrow \big\{a \in A : \forall i < n \, (|a(x_i)| < \frac{1}{m})\big\}.$$

Wir zeigen nun, dass $\Psi_{n,m}$ halbstetig von oben ist. Sei

$$O \supset \uparrow \big\{a \in A : \forall i < n \, (|a(x_i)| < \frac{1}{m})\big\}$$

eine offene Umgebung. Aus der Folgerung 2.3.2 ergibt sich, dass es eine endliche Teilmenge A_0 von A gibt, für die $O \supset \uparrow A_0$. Seien $U_i \ni x_i$, $i < n$, offene Umgebungen, sodass $|a(z_i)| < \frac{1}{m}$ für alle $z_i \in U_i$, $a \in A_0$, und $i < n$. Es ist jetzt leicht einzusehen, dass

$$\Psi[\prod_{i<n} U_i] = \bigcup \{\Psi \langle z_0, \ldots, z_{n-1} \rangle : \forall i < n \, (z_i \in U_i)\} \subset \uparrow A_0 \subset O,$$

was die Halbstetigkeit von oben von Ψ bedeutet. Aus dem Lemma 2.3.4 folgt, dass $l(\Psi_{n,m}[X^n]) \leq \kappa$ für alle m, n gilt, und daher auch $l(Y) \leq \kappa$, wobei

$$Y := \bigcup \{\Psi_{n,m}[X^n] : n, m \in \omega\} \subset \mathcal{P}(A).$$

Weil 0 in der Abschließung von A liegt, enthält Y nicht die leere Menge: Für alle $\langle x_0, \ldots . x_{n-1} \rangle$ gibt es $a \in A$ für die $\forall i < n \, (|a(x_i)| < 1/m)$ gilt (sonst hätten wir $0 \notin \bar{A}$), also $a \in B$ für alle $B \in \Psi_{n,m} \langle x_0 . \ldots , x_{n-1} \rangle$. Es folgt damit, dass $\mathsf{O} := \{O_a : a \in A\}$, wobei $O_a = \uparrow \{a\} \subset \mathcal{P}(A)$, eine offene Überdeckung von Y ist. Da $l(Y) \leq \kappa$, gibt es eine Teilüberdeckung $\{O_{a_i} : i < \kappa\}$ von O. Es bleibt zu zeigen, dass 0 in der Abschließung von $\{a_i : i < \kappa\}$ liegt. Um dies einzusehen, wählen wir $n, m > 0$ und $\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle \in X^n$. Also folgt

$$\exists \alpha < \kappa \, (\big\{a \in A : \forall i < n (|a(x_i)| < \frac{1}{m}) \in \uparrow \{a_\alpha\}\big\}),$$

was

$$\exists \alpha < \kappa \, (a_\alpha \in \big\{a \in A : \forall i < n (|a(x_i)| < \frac{1}{m})\big\})$$

bedeutet, und daher $|a_\alpha(x_i)| < \frac{1}{m}$ für alle $i < n$; somit $0 \in \overline{\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Seien $\kappa = t(C_p(X))$, $n \geq 1$, und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X^n. Wir nennen eine endliche Menge $\mathcal{V}$ von offenen Teilmengen von X *$\mathcal{U}$-klein*, wenn gilt

$$\forall V_0, \ldots, V_{n-1} \in \mathcal{V}\, \exists G \in \mathcal{U}\, (\prod_{i<n} V_i \subset G).$$

Sei V die Familie von allen $\mathcal{U}$-kleinen Mengen. Für eine $\mathcal{U}$-kleine Menge $\mathcal{V} \in \mathsf{V}$ sei $A_\mathcal{V} = \{f \in C_p(X) : f \restriction (X \setminus \cup\mathcal{V}) \equiv 0\}$ und $A = \bigcup\{A_\mathcal{V} : \mathcal{V} \in \mathsf{V}\}$. Wir zeigen nun, dass die konstante Funktion 1 in der Abschließung von A liegt. Sei $K = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \subset X$, und für jede $i < n$ sei W_i eine offene Umgebung von x_i, für die gilt

$$\forall j_0, \ldots, j_{n-1} < n\, \exists\, U \in \mathcal{U}\; (\prod_{i<n} W_{j_i} \subset U).$$

Die Existenz von solchen Umgebungen ergibt sich aus der Endlichkeit der Menge aller Folgen $\langle j_0, \ldots, j_{n-1}\rangle$ wie oben. Es gibt $f \in C_p(X)$, sodass $f \restriction K \equiv 1$ und $f \restriction (X \setminus \bigcup_{i<n} W_i) \equiv 0$ (weil X vollständig-regulär ist). Da $\mathcal{W} := \{W_i : i < n\}$ offensichtlich $\mathcal{U}$-klein ist, ergibt sich damit $f \in A_\mathcal{W} \subset A$ und deshalb $1 \in \bar{A}$. Aus $t(C_p(X)) = \kappa$ folgt, dass es $B \subset A$ gibt, sodass $|B| \leq \kappa$ und $1 \in \bar{B}$. Da $B \subset A$, für jede Funktion $h \in B$ gibt es $\mathcal{V}_h \in \mathsf{V}$, sodass $h \in A_{\mathcal{V}_h}$. Sei $h \in B$ und für jede endliche Folge $\vec{V} := \langle V_0, \ldots, V_{n-1}\rangle \in \mathcal{V}_h^n$ sei $U_{h,\vec{V}} \in \mathcal{U}$, für die $\prod_{i<n} V_i \subset U_{h,\vec{V}}$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{U}_0 := \{U_{h,\vec{V}} : h \in B, \vec{V} \in \mathcal{V}_h^n\}$ eine Überdeckung von X^n ist. Seien $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in X^n$ und $h \in B$, sodass $h(x_i) > 0$ für alle $i < n$. Aus $h \restriction (X \setminus \cup\mathcal{V}_h) \equiv 0$ ergibt sich $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \subset \cup\mathcal{V}_h$ und daher gibt es $\vec{V} = \langle V_0, \ldots, V_{n-1}\rangle \in \mathcal{V}_h^n$ mit $x_i \in V_i$. Schließlich erhalten wir

$$\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in \prod_{i<n} V_i \subset U_{h,\vec{V}} \in \mathcal{U}_0.$$

□

3.2 Die Dichtheit von $C_p(X)$

Wie der Titel suggeriert, in diesem Abschnitt werden wir die Dichtheit von $C_p(X)$ in Bezug auf die Eigenschaften von X untersuchen.

Definition 3.2.1. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Die kleinste Kardinalität $|\mathcal{B}|$ einer Basis von τ bezeichnen wir als $w(X, \tau)$.

$iw(X) = \min \big\{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ ist eine Basis einer vollständig-regulären Topologie $\tau' \subset \tau$ auf $X \big\}$.

Die kleinste Kardinalität $|Y|$ einer dichten Teilmenge Y von X bezeichnen wir als $d(X, \tau)$ und nennen die *Dichte (oder Dichtheit) von X*. □

Beispiel 3.2.2. 1. $w(\mathbb{R}^X) = |X|$ für jede unendliche Menge X. Tatsächlich, seien $\mathcal{I} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ und

$$\mathcal{B} = \Big\{ \bigcap_{x \in A} \pi_x^{-1} h(x) \mid A \subset X \text{ ist endlich, } h : A \to \mathcal{I} \Big\}.$$

$\mathcal{B}$ ist eine Basis für die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^X$: Für jeden $t \in \mathbb{R}^X$ und offene $W \subset \mathbb{R}^X$, die t enthält, findet man leicht $B \in \mathcal{B}$, sodass $t \in B \subset W$. Die Kardinalität von $\mathcal{B}$ können wir mithilfe des Satzes 2.1.8 auf folgende Weise einschätzen:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| \le \Big| \big\{ A : A \subset X \text{ endlich} \big\} \times \mathcal{I}^{<\omega} \Big| \le |X^{<\omega} \times \mathcal{I}^{<\omega}| = \\ = \max\{|X^{<\omega}|, |\mathcal{I}^{<\omega}|\} = \max\{|X|, \omega\} = |X|. \end{aligned}$$

Für die andere Richtung nehmen wir eine unendliche Familie $\mathcal{W}$ offener nicht leerer Teilmengen von $\mathbb{R}^X$ mit $|\mathcal{W}| < |X|$, und für jede $W \in \mathcal{W}$ finden wir eine Teilmenge $O_W = \bigcap_{x \in A_W} \pi_x^{-1}(O_{x,W})$, wobei $A_W \subset X$ endlich ist, und $O_{x,W} \subset \mathbb{R}$ offen für alle $x \in A_W$ ist. O_W existiert, weil solche Teilmengen von $\mathbb{R}^X$ eine Basis der Produkttopologie bilden. Sei $x_* \in X \setminus \bigcup\{A_W : W \in \mathcal{W}\}$. Solcher x_* existiert, weil

$$|\bigcup\{A_W : W \in \mathcal{W}\}| \le |\omega \times \mathcal{W}| = \max\{\omega, |\mathcal{W}|\} < |X|.$$

Wir zeigen nun, dass

$$\forall W \in \mathcal{W} \ \big(O_W \not\subset \pi_{x_*}^{-1}(-1, 1) \big). \tag{3.1}$$

Tatsächlich, jede Menge O_W enthält einen Punkt $z \in \mathbb{R}^X$ mit $z(x_*) = 2$, und $\pi_{x_*}^{-1}(-1, 1)$ hat keine solchen Elemente. Aus (3.1) ergibt sich, dass auch $W \not\subset \pi_{x_*}^{-1}(-1, 1)$ für alle $W \in \mathcal{W}$ gilt, und somit ist $\mathcal{W}$ keine Basis für die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^X$.

2. Wenn $f : X \to Y$ eine injektive stetige Funktion ist, wobei Y vollständig-regulär ist, dann gilt $iw(X) \le w(Y)$: Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie auf Y, so ist die Familie $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{B}\}$ eine Basis für eine vollständig-reguläre Topologie auf X, die in der anfänglichen Topologie von X enthalten ist. □

Den abzählbaren Fall des folgenden Satzes, der in [23] bewiesen wurde, werden wir im Beweis vom Satz 3.4.3 verwenden.

Satz 3.2.3. *$d(C_p(X)) = iw(X)$ für jeden vollständig-regulären Raum X.*

Zuerst beweisen wir den folgenden

Hilfssatz 3.2.4. *$iw(C_p(X)) \leq d(X)$ für jeden vollständig-regulären Raum X.*

Beweis. Sei Y ein Teilraum von X, der dicht in X liegt und Kardinalität $d(X)$ hat. Aus dem Hilfssatz 1.2.1(iii) ergibt sich, dass die Einschränkung $p_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$, $p_Y : f \mapsto f \restriction Y$, injektiv ist. Deswegen

$$iw(C_p(X)) \leq w(C_p(Y)) \leq w(\mathbb{R}^Y) \leq |Y| = d(X),$$

siehe Beispiel 3.2.2. □

Hilfssatz 3.2.5. *$d(C_p(X)) \leq w(X)$ für jeden vollständig-regulären Raum X.*

Beweis. Seien $\mathcal{B}$ eine Basis für X mit $|\mathcal{B}| = w(X)$,

$$\mathsf{U} = \big\{\mathcal{U} : \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \text{ ist endlich und } \{\bar{U} : U \in \mathcal{U}\} \text{ ist disjunkt}\big\},$$

$T_{\mathcal{U}} = \mathbb{Q}^{\mathcal{U}}$ für jede $\mathcal{U} \in \mathsf{U}$, und für jede $h \in T_{\mathcal{U}}$ sei $f(h,\mathcal{U}) : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $f(h,\mathcal{U}) \restriction \bar{U} \equiv h(U)$ für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt. Dann liegt

$$D = \big\{f(h,\mathcal{U}) \ : \ \mathcal{U} \in \mathsf{U}, h \in \mathbb{Q}^{\mathcal{U}}\big\}$$

dicht in $\mathbb{R}^X$ (und somit auch in $C_p(X)$): Nehmen wir eine offene Teilmenge $W = \bigcap_{x\in A} \pi_x^{-1}(O_x)$, wobei $A \in [X]^{<\omega}$ und $O_x \subset \mathbb{R}$ offen für alle $x \in A$ ist. Für jeden Punkt $x \in A$ sei $\mathcal{B} \ni U_x \ni x$, sodass $\overline{U_{x_0}} \cap \overline{U_{x_1}} = \emptyset$ für alle $x_0 \neq x_1$ in A. Dann liegt $\mathcal{U} := \{U_x : x \in A\}$ in U. Für jeden $x \in A$ sei $h(U_x)$ eine Zahl in $\mathbb{Q} \cap O_x$. Es ist leicht einzusehen, dass $f(h,\mathcal{U}) \in D \cap W$, und deswegen $D \cap W \neq \emptyset$. Es bleibt, die Kardinalität von D einzuschränken:

$$|D| \leq |\mathsf{U} \times \mathbb{Q}^{<\omega}| = \max\{|\mathsf{U}|, \omega\} \leq |\mathcal{B}^{<\omega}| = |\mathcal{B}| = w(X).$$

□

Beweis vom Satz 3.2.3. Aus $X \subset C_p(C_p(X))$ ergibt sich

$$iw(X) \leq iw(C_p(C_p(X))) \leq d(C_p(X)),$$

wobei die letzte Ungleichung aus Hilfssatz 3.2.4 folgt.

Sei τ die Topologie von X. Um die Ungleichung $d(C_p(X)) \leq iw(W)$ zu beweisen, nehmen wir eine vollständig-reguläre Topologie $\tau' \subset \tau$ auf X, sodass $w(X, \tau') = iw(X, \tau)$. Dann für den vollständig-regulären Raum $Y = \langle X, \tau' \rangle$ ist $\mathrm{id}_X : X \to Y$ stetig und bijektiv. Nach dem Hilfssatz 1.2.5 liegt $\mathrm{id}_X^\#[C_p(Y)]$ dicht in $C_p(X)$, und daher mithilfe des Hilfssatzes 3.2.5 ergibt sich

$$d(C_p(X)) \leq d\big(\mathrm{id}_X^\#[C_p(Y)]\big) \leq d(C_p(Y)) \leq w(Y) = iw(X),$$

und somit die gewünschte Ungleichung gilt. □

3.3 Menger-Räume und Fan-Enge

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die Überdeckungseigenschaft von Menger in gewissem Sinne dual zu einer kombinatorischen Variante der Enge (siehe Definition 3.3.1) via Funktionenräume ist. Der nachstehend aufgeführte Satz 3.3.4 wurde zuerst in [2] bewiesen. Für die Schlussfolgerung (1) $\Rightarrow$ (2) geben wir hier einen alternativen Beweis, der wieder von mengenwertigen Abbildungen Gebrauch macht. Der unten präsentierte Beweis der Schlussfolgerung (2) $\Rightarrow$ (1) ähnelt dem in [3, S. 58-60], wir haben aber auch einige Details hinzugefügt.

Definition 3.3.1. Ein topologischer Raum X hat *abzählbare Fan-Enge*, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und jede Folge $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ von Teilmengen von X mit $x \in \bar{A}_n$, es eine Folge $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ gibt, sodass jede B_n eine endliche Teilmenge von A_n ist, und $x \in \overline{\bigcup\{B_n : n \in \omega\}}$. □

Beispiel 3.3.2. Jeder metrische Raum X hat abzählbare Fan-Enge, siehe Beispiel 3.4.6 für den Beweis. □

Beispiel 3.3.3. Es gibt einen abzählbaren vollständig-regulären Raum X, der keine abzählbare Fan-Enge hat. Betrachten wir den Raum S_ω mit Grundmenge $\{\langle 0,0 \rangle\} \cup \{\langle n,m \rangle :$

$n, m \in \omega, n, m \geq 1\}$, wo alle Punkte außer $\langle 0,0\rangle$ isoliert sind, und die Umgebungsbasis von $\langle 0,0\rangle$ besteht aus den Mengen

$$U_f = \{\langle 0,0\rangle\} \cup \{\langle n,m\rangle : m,n \geq 1, m > f(n)\}, \quad \text{wobei } f \in \omega^\omega.$$

Tatsächlich, seien $A_n = \{\langle n,m\rangle : m \geq 1\}$ und B_n eine endliche Teilmenge von A_n. Dann für die Funktion $f(n) = \max\{m \geq 1 : \langle n,m\rangle \in B_n\}$ gilt $U_f \cap B_n = \emptyset$ für alle n, daher $\langle 0,0\rangle \notin \overline{\bigcup_{n\in\omega} B_n}$. Gleichzeitig ist jede A_n eine gegen $\langle 0,0\rangle$ konvergierende Folge, was $\langle 0,0\rangle \in \overline{A_n}$ ergibt. □

Satz 3.3.4. *Für einen topologischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *X^n ist ein Menger-Raum für alle $n \in \omega$, $n \geq 1$;*

(2) *$C_p(X)$ hat abzählbare Fan-Enge.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Seien $A_n \subset C_p(X)$ und $f \in \bar{A}_n$ für alle $n \in \omega$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass f gleich 0 ist, siehe den Beweis vom Satz 3.1.3. Da X^m ein Lindelöf-Raum für alle $m \in \omega$ ist, ergibt sich aus dem letzteren Satz, dass $t(C_p(X)) \leq \omega$. Daher gibt es eine abzählbare $B_n := \{f^n_k : k \in \omega\} \subset A_n$ mit $0 \in \bar{B}_n$. Für jede $m \in \omega$, $m \geq 1$, betrachten wir die folgende Abbildung $\psi_m : X^m \to \omega^\omega$:

$$\psi_m\big(\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle\big)(n) = \min\big\{k : \forall i < m\, (|f^n_k(x_i)| < \frac{1}{m})\big\}.$$

Wir zeigen nun, dass ψ_m stetig von oben ist. Seien $n, l \in \omega$ und $\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle \in X^m$, sodass $\psi_m\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle(n) \leq l$. Es folgt

$$\exists k \leq l\, \forall i < m\, (|f^n_k(x_i)| < \frac{1}{m}),$$

also gibt es offene Umgebungen $U_i \ni x_i$, $i < m$, sodass $|f^n_k(x'_i)| < \frac{1}{m}$ für alle $x'_i \in U_i$. Daraus ergibt sich die gewünschte Stetigkeit von oben, weil

$$\psi_m\langle x'_0, \ldots, x'_{m-1}\rangle(n) \leq k \leq l$$

für alle $\langle x'_0, \ldots, x'_{m-1}\rangle \in \prod_{i<m} U_i$ gilt.

Jetzt wenden wir auf ψ_m Satz 2.3.6 an und erhalten die kompaktwertige und halbstetige von oben Abbildung

$$\Psi_m : X^m \Rightarrow \omega^\omega, \quad \Psi : \vec{x} \mapsto \downarrow \psi_m(\vec{x}) := \big\{t \in \omega^\omega : \forall n \in \omega\, (t(n) \leq \psi_m(\vec{x})(n))\big\}.$$

Dann ist $\Psi_m[X^m] := \bigcup_{\vec{x}\in X^m} \Psi(\vec{x})$ ein Menger-Raum, und daher so ist auch $Y := \bigcup_{m\geq 1} \Psi[X^m]$, siehe Lemma 2.2.5. Nun folgt aus Lemma 2.2.7, dass Y nicht dominierend ist, und daher so ist auch $Y_0 := \bigcup_{m\in\omega} \psi_m[Y^m]$, weil $Y_0 \subset Y$. Sei also $b \in \omega^\omega$ mit der Eigenschaft

$$\forall m \geq 1\, \forall \vec{x} \in X^m \ \Big(\big|\big\{n \in \omega : \psi_m(\vec{x})(n) \leq b(n)\big\}\big| = \omega\Big). \tag{3.2}$$

Es bleibt nachzuprüfen, dass $0 \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} K_n}$, wobei $K_n = \{f_k^n : k \leq b(n)\}$. Sei also $Z = \{x_0, \ldots, x_l\}$ eine endliche Teilmenge von X und $\varepsilon > 0$. Nehmen wir eine $m \geq 1$, sodass $l < m$ und $\varepsilon > \frac{1}{m}$, und betrachten wir eine endliche Folge $\vec{x} \in X^m$, die alle x_i enthält. Aus (3.2) ergibt sich $n \in \omega$ mit $\psi_m(\vec{x})(n) \leq b(n)$, und daher gibt es $k \leq b(n)$ mit $|f_k^n(x_i)| < \frac{1}{m}$ für alle $i \leq l$. Dies bedeutet, dass K_n die beliebig ausgewählte Umgebung $\{f \in C_p(X) : \forall i \leq l\, (|f(x_i)| < \varepsilon)\}$ von $0 \in C_p(X)$ überschneidet.

(2) $\Rightarrow$ (1). Seien $m \geq 1$ und $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega\rangle$ eine Folge von offenen Überdeckungen von X^m. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass alle $\mathcal{U}_n$ abgeschlossen gegenüber endlichen Vereinigungen sind. Wir nennen eine offene Teilmenge V von X *$\mathcal{U}_n$-klein*, wenn es $U \in \mathcal{U}_n$ mit $V^m \subset U$ gibt. Wir brauchen ein einfaches

Lemma 3.3.5. *Sei T eine endliche Teilmenge von einem topologischen Raum Z. Für jede $k \geq 1$ und offene Umgebung U von T^k in Z^k, es gibt eine offene Teilmenge V von X, sodass $T \subset V$ und $V^k \subset U$ gelten.*

Beweis. Dieses Lemma wird durch Induktion nach k bewiesen. Für $k = 1$ ist $V = U$ die gewünschte Umgebung. Angenommen, dass das Lemma für k gilt, betrachten wir eine offene $U \subset Z^{k+1}$, die T^{k+1} enthält. Für jedes $z \in T$ gibt es offene Mengen $W_t \subset Z^k$ und $V_t \subset Z$ mit $U \supset W_t \times V_t \supset T^k \times \{t\}$. Dann für $W = \bigcap_{t\in T} W_t$ haben wir $T^k \times \{t\} \subset W \times V_t \subset U$, also $T^{k+1} \subset W \times \bigcup_{t\in T} V_t \subset U$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine offene Umgebung V_0 von T in X, sodass $V_0^k \subset W$. Dann hat $V := V_0 \cap \bigcup_{t\in T} V_t$ die gewünschte Eigenschaft: $T \subset V_0$ und $T \subset \bigcup_{t\in T} V_t$, daher $T \subset V$, und

$$V^{k+1} = V^k \times V \subset V_0^k \times \bigcup_{t\in T} V_t \subset W \times \bigcup_{t\in T} V_t \subset U.$$

$\square$

Für jede endliche Teilmenge K von X gibt es eine $\mathcal{U}_n$-kleine V mit $K \subset V$: Es gibt eine endliche $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_n$ mit $K^m \subset \cup\mathcal{U}'$, und aus dem Lemma 3.3.5 ergibt sich eine offene $V \subset X$ mit $K \subset V$ und $V^m \subset \cup\mathcal{U}'$. Es folgt, dass $\cup\mathcal{U}' \in \mathcal{U}_n$ und somit ist V $\mathcal{U}_n$-klein.

Sei $\mathcal{V}_n$ die Familie aller $\mathcal{U}_n$-kleinen Mengen. Für eine $\mathcal{U}_n$-kleine Menge $V \in \mathcal{V}$ sei $A_V = \{f \in C_p(X) : f \restriction (X \setminus V) \equiv 0\}$ und $A_n = \bigcup\{A_V : V \in \mathcal{V}_n\}$. Wir zeigen nun, dass die konstante Funktion 1 in der Abschließung von A_n liegt, $n \in \omega$. Sei K eine endliche Teilmenge von X. Es folgt, dass es eine $\mathcal{U}_n$-kleine $V \supset K$ gibt. Weiterhin gibt es $f \in C_p(X)$, sodass $f \restriction K \equiv 1$ und $f \restriction (X \setminus V) \equiv 0$ (weil X vollständig-regulär ist), daher $f \in A_V \subset A_n$ und deshalb $1 \in \bar{A}_n$. Aus abzählbarer Fan-Enge von $C_p(X)$ folgt, dass es endliche $B_n \subset A_n$ gibt, sodass $1 \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} B_n}$. Da $B_n \subset A_n$, für jede Funktion $h \in B_n$ gibt es $V_{n,h} \in \mathcal{V}_n$, sodass $h \in A_{V_{n,h}}$. Für $h \in B_n$ sei $U_{n,h} \in \mathcal{U}_n$, für die $V^m_{n,h} \subset U_{n,h}$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass für $\mathcal{U}'_n := \{U_{n,h} : h \in B_n\}$, $n \in \omega$, gilt:

$$X^m \subset \bigcup \{\cup\mathcal{U}'_n : n \in \omega\}.$$

Um dies einzusehen, betrachten wir $\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle \in X^m$ und nehmen $n \in \omega$ und $h \in B_n$, sodass $h(x_i) > 0$ für alle $i < m$ (die Existenz solcher n und h ergibt sich aus $1 \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} B_n}$). Aus $h \restriction (X \setminus V_{n,h}) \equiv 0$ ergibt sich $\{x_0, \ldots, x_{m-1}\} \subset V_{n,h}$ und schließlich

$$\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle \in V^m_{n,h} \subset U_{n,h} \in \mathcal{U}'_n.$$

□

Beispiel 3.3.6. Die im Beweis von (1) ⇒ (2) definierte Abbildung ψ_m könnte tatsächlich nicht stetig sein. Zum Beispiel, betrachten wir den Fall, dass $m = 1$, $n = 0$, und für einen nicht isolierten Punkt $x \in X$ gilt:

$$\psi_1(x)(0) = \min\{k : (|f^0_k(x)| < 1)\} = 1,\ \ f^0_0(x) = 1,$$

und $f^0_0(z) < 1$ für alle $z \neq x$. Dann $\psi_1(z)(0) = 0 \neq \psi_1(x)$ für alle $z \neq x$, daher ist ψ_1 in dieser Konstellation nicht stetig. □

Die folgende Anmerkung brauchen wir für die Untersuchungen einer Version der Fan-Enge, die besonders für separable Räume geeignet ist, siehe Definition 3.3.9.

Anmerkung 3.3.7. Die Mengen $A_n = \bigcup\{A_V : V \in \mathcal{V}_n\}$, die wir im Beweis der Schlussfolgerung (2) ⇒ (1) definiert haben, erhalten nicht nur die konstante Funktion 1 in Ihren

Abschließungen, sondern sind zudem dicht in $C_p(X)$: Für beliebige $g \in C_p(X)$ kann man $h \in \bar{A}_n$ genauso zeigen, wie wir bereits $1 \in \bar{A}_n$ bewiesen haben. □

Folgerung 3.3.8. *Sei X ein topologischer Raum. Wenn X^n ein Menger-Raum für alle $n \in \omega$ ist, dan kann der Raum S_ω (siehe Beispiel 3.3.3) nicht in $C_p(X)$ eingebettet werden.*

Beweis. Aus dem Satz 3.3.4 folgt, dass $C_p(X)$ abzählbare Fan-Enge hat. Es ist offensichtlich, dass alle Teilräume eines solchen Raums ebenfalls abzählbare Fan-Enge haben, wohingegen ist S_ω nicht so. □

Die Frage [3, II.2.7], ob es einen Menger-Raum X gibt, sodass S_ω in $C_p(X)$ eingebettet werden kann, bleibt offen.

Die folgende Definition wurde in [27] eingeführt.

Definition 3.3.9. Ein topologischer Raum X ist *M-separabel*, wenn für jede Folge $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ von dichten Teilmengen von X es eine Folge $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ gibt, sodass jede B_n eine endliche Teilmenge von A_n ist, und $X = \overline{\bigcup\{B_n : n \in \omega\}}$. □

Beispiel 3.3.10. Der im Beispiel 3.3.3 definierte Raum S_ω hat keine abzählbare Fan-Enge, siehe den Beweis im obengenannten Beispiel. Allerdings ist S_ω M-separabel, weil jeder Raum mit einer abzählbaren dichten Teilmenge, die aus isolierten Punkten besteht, offensichtlich M-separabel ist.

Auf der anderen Seite, jeder M-separable Raum ist separabel, daher hat jeder überabzählbare diskrete Raum abzählbare Fan-Enge, ist aber nicht M-separabel.

Jeder separable Raum X mit abzählbarer Fan-Enge ist M-separabel: Seien A_n, $n \in \omega$, dichte Teilmengen von X und $Y = \{y_i : i \in \omega\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X. Dann für jede $i \in \omega$ gibt es eine Folge $\langle B^i_n : n \geq i\rangle$ mit $y_i \in \overline{\bigcup\{B^i_n : n \geq i\}}$. Dann für $B_n := \bigcup_{i \leq n} B^i_n \subset A_n$ haben wir offensichtlich
$X = \overline{\{y_i : i \in \omega\}} \subset \overline{\bigcup\{B_n : n \in \omega\}}$

Jeder separable metrische Raum X ist M-separabel. Dies ergibt sich unmittelbar aus der oben bewiesenen Anmerkung samt dem Beispiel 3.3.2. □

Für metrische separable Räume wurde die Liste der äquivalenten Aussagen aus dem Satz 3.3.4 in [27] auf folgende Weise erweitert:

Satz 3.3.11. *Für einen metrischen separablen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *X^n ist ein Menger-Raum für alle $n \in \omega$, $n \geq 1$;*

(2) *$C_p(X)$ hat abzählbare Fan-Enge;*

(3) *$C_p(X)$ ist M-separabel.*

Beweis. Die Aussagen (1) und (2) sind für alle vollständig-regulären Räume äquivalent, siehe Satz 3.3.4. Die Schlussfolgerung (2) $\Rightarrow$ (3) folgt aus dem Satz 3.2.3 samt Beispiel 3.3.10: $C_p(X)$ ist M-separabel, weil er separabel nach dem Satz 3.2.3 ist, und abzählbare Fan-Enge hat.

(3) $\Rightarrow$ (1). Laut der Anmerkung 3.3.7 sind die Mengen $A_n = \bigcup\{A_V : V \in \mathcal{V}_n\}$, die wir im Beweis vom Satz 3.3.4 ((2) $\Rightarrow$ (1)) definiert haben, dicht in $C_p(X)$. Daher gibt es eine Folge $\langle B_n : n \in \omega\rangle$, sodass jede B_n eine endliche Teilmenge von A_n ist, und $C_p(X) = \overline{\bigcup\{B_n : n \in \omega\}}$. Insbesondere gilt $1 \in \overline{\bigcup\{B_n : n \in \omega\}}$. Es reicht nun den Beweis vom Satz 3.3.4 ((2) $\Rightarrow$ (1)), beginnend mit der Definition von $V_{n,h}$ für $h \in B_n$, wortwörtlich zu wiederholen. □

3.4 Hurewicz-Räume und Fan-Enge

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass ähnlich der Überdeckungseigenschaft von Menger, auch die Überdeckungseigenschaft von Hurewicz dual zu einer kombinatorischen Variante der Enge (siehe Definition 3.4.1) via Funktionenräume ist. Der nachstehend aufgeführte Satz 3.4.3 wurde in [18] bewiesen. Die Schlussfolgerung (1) $\Rightarrow$ (2) beweisen wir mithilfe mengenwertiger Abbildungen, für die anderen Schlussfolgerungen verwenden wir die Ideen aus [2, 18].

Definition 3.4.1. Ein topologischer Raum X hat *abzählbare strenge Fan-Enge*, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und jede Folge $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ von Teilmengen von X mit $x \in \bar{A}_n$, es eine Folge $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ gibt, sodass jede B_n eine endliche Teilmenge von A_n ist, und $x \in \overline{\bigcup\{B_n : n \in I\}}$ für jede unendliche $I \subset \omega$. Die letztere Bedingung ist äquivalent zu

$$\forall U \in \mathcal{B}\, \exists n_0 \in \omega\, \forall n \geq n_0\, \big(U \cap B_n \neq \emptyset\big),$$

wobei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x ist. □

Die folgende Definition wurde in [17] eingeführt.

Definition 3.4.2. Ein topologischer Raum X heißt *Reznichenko-Raum*, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und Teilmenge $A \subset X \setminus \{x\}$, die x in ihrer Abschließung enthält, es eine Folge $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ von endlichen paarweise disjunkten Teilmengen von A gibt, sodass

$$\forall U \in \mathcal{B}\, \exists n_0 \in \omega\, \forall n \geq n_0\, \big(U \cap A_n \neq \emptyset\big),$$

wobei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x ist. □

Der Beweis des folgenden Satzes geschieht in mehreren Schritten, manche sind ähnlich den ensprechenden Schritten im Beweis vom Satz 3.3.4. Der Vollständigkeit halber werden diese unten aufgeführt.

Satz 3.4.3. *Für einen topologischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *X^n ist ein Hurewicz-Raum für alle $n \in \omega$, $n \geq 1$;*

(2) *$C_p(X)$ hat abzählbare strenge Fan-Enge; und*

(3) *$C_p(X)$ ist ein Reznichenko-Raum und hat abzählbare Fan-Enge.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Seien $A_n \subset C_p(X)$ und $f \in \bar{A}_n$ für alle $n \in \omega$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass f gleich 0 ist, siehe den Beweis vom Satz 3.1.3. Da X^m ein Lindelöf-Raum für alle $m \in \omega$ ist, ergibt sich aus dem letzteren Satz, dass $t(C_p(X)) \leq \omega$. Daher gibt es eine abzählbare $B_n := \{f_k^n : k \in \omega\} \subset A_n$ mit $0 \in \bar{B}_n$. Für jede $m \in \omega$, $m \geq 1$, betrachten wir die folgende Abbildung $\psi_m : X^m \to \omega^\omega$:

$$\psi_m\big(\langle x_0, \dots, x_{m-1}\rangle\big)(n) = \min\big\{k : \forall i < m\, (|f_k^n(x_i)| < \frac{1}{m})\big\}.$$

Die Abbildung ψ_m ist stetig von oben, siehe den Beweis vom Satz 3.3.4.

Jetzt wenden wir auf ψ_m den Satz 2.3.6 an und erhalten die kompaktwertige und halbstetige von oben Abbildung

$$\Psi_m : X^m \Rightarrow \omega^\omega, \quad \Psi : \vec{x} \mapsto \downarrow \psi_m(\vec{x}) := \big\{t \in \omega^\omega : \forall n \in \omega\, (t(n) \leq \psi_m(\vec{x})(n))\big\}.$$

Dann ist $\Psi_m[X^m] := \bigcup_{\vec{x}\in X^m} \Psi(\vec{x})$ ein Hurewicz-Raum, und daher so ist auch $Y := \bigcup_{m\geq 1} \Psi[X^m]$, siehe Lemma 2.2.5. Nun folgt aus Lemma 2.2.7, dass Y begrenzt ist, und daher so ist auch $Y_0 := \bigcup_{m\in\omega} \psi_m[Y^m]$, weil $Y_0 \subset Y$. Sei also $b \in \omega^\omega$ mit der Eigenschaft

$$\forall m \geq 1\, \forall \vec{x} \in X^m\, \exists n_0 \in \omega\, \forall n \geq n_0\, \big(\psi_m(\vec{x})(n) \leq b(n)\big). \tag{3.3}$$

Es bleibt nachzuprüfen, dass $0 \in \overline{\bigcup_{n\in I} K_n}$ für jede unendliche $I \subset \omega$, wobei $K_n = \{f_k^n : k \leq b(n)\}$. Sei also $Z = \{x_0, \ldots, x_l\}$ eine endliche Teilmenge von X, $I \subset \omega$ unendlich, und $\varepsilon > 0$. Nehmen wir eine $m \geq 1$, sodass $l < m$ und $\varepsilon > \frac{1}{m}$, und betrachten wir eine endliche Folge $\vec{x} \in X^m$, die alle x_i enthält. Aus (3.3) ergibt sich $n \in I$ mit $\psi_m(\vec{x})(n) \leq b(n)$, und daher gibt es $k \leq b(n)$ mit $|f_k^n(x_i)| < \frac{1}{m}$ für alle $i \leq l$. Dies bedeutet, dass B_n die beliebig ausgewählte Umgebung $\{f \in C_p(X) : \forall i \leq l\, (|f(x_i)| < \varepsilon)\}$ von $0 \in C_p(X)$ überschneidet.

(2) $\Rightarrow$ (3). Um die Eigenschaft von Reznichenko vom Funktionenraum $C_p(X)$ zu beweisen, nehmen wir eine Teilmenge $A \subset C_p(X) \setminus \{0\}$, die x in ihrer Abschließung enthält. Da $t(C_p(X)) \leq \omega$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass A abzählbar ist. Sei $A = \{a_n : n \in \omega\}$ eine Aufzählung mit $a_{n_0} \neq a_{n_1}$ für alle $n_0 \neq n_1$. Aus $0 \notin A$ ergibt sich, dass 0 in der Abschließung von $A_n := \{a_i : i \geq n\}$ für alle n liegt. Da $C_p(X)$ abzählbare strenge Fan-Enge hat, gibt es eine Folge $\langle B_n : n \in \omega\rangle$, sodass jede B_n eine endliche nicht-leere Teilmenge von A_n ist, und

$$\forall U \in \mathcal{B}\, \exists n_0 \in \omega\, \forall n \geq n_0\, \big(U \cap B_n \neq \emptyset\big), \tag{3.4}$$

wobei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von 0 in $C_p(X)$ ist. Sei $k(n) = \max\{i \in \omega : a_i \in B_n\}$. Wir definieren nun induktiv eine steigende Folge $\langle l_n : n \in \omega\rangle$ von natürlichen Zahlen: $l_0 = 0$ und $l_{n+1} = k(l_n) + 1$. Dann besteht die Folge $\langle B_{l_n} : n \in \omega\rangle$ aus paarweise disjunkten Teilmengen von A: Für $n_0 < n_1$ in ω haben wir

$$\max\{i \in \omega : a_i \in B_{l_{n_0}}\} = k(l_{n_0}) < l_{n_0+1} \leq l_{n_1} \leq \min\{i \in \omega : a_i \in B_{n_1}\},$$

daher $B_{n_0} \cap B_{n_1} = \emptyset$. Dies zusammen mit (3.4) bedeutet, dass die Folge $\langle B_{l_n} : n \in \omega\rangle$ die in Definition 3.4.2 gestellten Bedingungen erfüllt.

(3) $\Rightarrow$ (1). Wir werden annehmen, dass X nicht kompakt ist, da kompakte Räume sowieso Hurewicz-Räume sind. Seien $m \geq 1$ und $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega\rangle$ eine Folge von offenen Überdeckungen von X^m. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass

- alle $\mathcal{U}_n$ abgeschlossen gegenüber endlichen Vereinigungen sind,
- $X^m \notin \mathcal{U}_n$ für alle n, und
- $\mathcal{U}_{n+1}$ feiner als $\mathcal{U}_n$ für alle n ist, d.h.,

$$\forall U \in \mathcal{U}_{n+1}\, \exists U' \in \mathcal{U}_n\, (U \subset U').$$

Wir nennen eine offene Teilmenge V von X *$\mathcal{U}_n$-klein*, wenn es $U \in \mathcal{U}_n$ mit $V^m \subset U$ gibt. X ist nicht $\mathcal{U}_n$-klein weil $X^m \notin \mathcal{U}_n$. Sei $\mathcal{V}_n$ die Familie aller $\mathcal{U}_n$-kleinen Mengen. Für eine $\mathcal{U}_n$-kleine Menge $V \in \mathcal{V}$ sei $A_V = \{f \in C_p(X) : f \neq 0, f \restriction (X \setminus V) \equiv 0\}$ und $A_n = \bigcup\{A_V : V \in \mathcal{V}_n\}$. Die konstante Funktion 1 liegt in der Abschließung von A_n für alle $n \in \omega$, siehe den Beweis vom Satz 3.3.4. Außerdem $\mathcal{V}_{n+1} \subset \mathcal{V}_n$ und daher $A_{n+1} \subset A_n$ für alle n, weil $\mathcal{U}_{n+1}$ finer als $\mathcal{U}_n$ ist. Aus abzählbarer Fan-Enge von $C_p(X)$ folgt, dass es endliche $B_n \subset A_n$ gibt, sodass $1 \in \overline{B}$, wobei $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Aus $1 \notin B$ und $1 \in \overline{B}$ ergibt sich, dass B unendlich ist. Aus der Reznichenko Eigenschaft von $C_p(X)$ folgt, dass es eine Folge $\langle C_k : k \in \omega\rangle$ von endlichen paarweise disjunkten Teilmengen von B gibt, sodass

$$\forall U \in \mathcal{B}\, \exists k_0 \in \omega\, \forall k \geq k_0\, \big(U \cap C_k \neq \emptyset\big), \tag{3.5}$$

wobei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von 1 ist. Wir können nun induktiv streng monoton steigende Folgen $\langle n_i : i \in \omega\rangle$ und $\langle k_i : i \in \omega\rangle$ von natürlichen Zahlen definieren, sodass $C_{k_i} \cap \bigcup_{j<n_i} B_j = \emptyset$ und $C_{k_i} \subset \bigcup_{j<n_{i+1}} B_j$ für alle $i \in \omega$ gilt. Es folgt nun, dass

$$C_{k_i} \subset \bigcup_{k_i \leq j < k_{i+1}} A_j \subset A_{k_i} \subset A_i,$$

weil die Folge $\langle A_i : i \in \omega\rangle$ monoton fallend ist. Für jede Funktion $h \in C_{k_i}$ gibt es $V_{i,h} \in \mathcal{V}_i$, sodass $h \in A_{V_{i,h}}$. Sei $U_{i,h} \in \mathcal{U}_i$ mit $V_{i,h}^m \subset U_{i,h}$. Es bleibt zu zeigen, dass für $\mathcal{U}'_i := \{U_{i,h} : h \in C_{k_i}\} \subset \mathcal{U}_i$, $i \in \omega$, gilt:

$$\big\{ \cup\mathcal{U}'_i : i \in \omega\big\} \text{ ist eine } \gamma\text{-Überdeckung von } X^m.$$

Um dies einzusehen, betrachten wir $\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle \in X^m$ und nehmen $i_0 \in \omega$, sodass für alle $i \geq i_0$ es $h_i \in C_{k_i}$ mit $h_i(x_j) > 0$ für alle $j < m$ gibt (die Existenz solcher i_0 ergibt sich aus (3.5)). Aus $h_i \restriction (X \setminus V_{i,h_i}) \equiv 0$ ergibt sich $\{x_0, \ldots, x_{m-1}\} \subset V_{i,h_i}$ für alle $i \geq i_0$, und schließlich

$$\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle \in V_{i,h_i}^m \subset U_{i,h_i} \in \mathcal{U}'_i$$

für alle $i \geq i_0$. $\square$

Da jeder Hurewicz-Raum offensichtlich Menger-Raum ist, aus Folgerung 3.3.8 ergibt sich, dass der Raum S_ω (siehe Beispiel 3.3.3 für die Definition) nicht in $C_p(X)$ eingebettet werden kann, wenn X^n ein Hurewicz-Raum für alle $n \in \omega$ ist. Allerdings bleibt die Frage, ob es einen Hurewicz-Raum X gibt, sodass S_ω in $C_p(X)$ eingebettet werden kann, offen.

Die folgende Anmerkung brauchen wir für die Untersuchungen einer Version der abzählbaren strengen Fan-Enge, die besonders für separable Räume geeignet ist, siehe Definition 3.4.5.

Anmerkung 3.4.4. Die Mengen $A_n = \bigcup\{A_V : V \in \mathcal{V}_n\}$, die wir im Beweis der Schlussfolgerung (3) $\Rightarrow$ (1) definiert haben, sind dicht in $C_p(X)$: Für beliebige $h \in C_p(X)$ kann man $h \in \bar{A}_n$ genauso zeigen, wie wir bereits $1 \in \bar{A}_n$ bewiesen haben. $\square$

Die folgende Definition wurde in [4] eingeführt.

Definition 3.4.5. Ein topologischer Raum X ist *H-separabel*, wenn für jede Folge $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ von dichten Teilmengen von X es eine Folge $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ gibt, sodass jede B_n eine endliche Teilmenge von A_n ist, und $X = \overline{\bigcup\{B_n : n \in I\}}$ für jede unendliche Teilmenge $I \subset \omega$ gilt. Die letztere Bedingung ist äquivalent zu

$$\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}\, \exists n_0 \in \omega\, \forall n \geq n_0\, \big(U \cap B_n \neq \emptyset\big),$$

wobei τ die Topologie von X ist. $\square$

Beispiel 3.4.6. Jeder metrische Raum X hat abzählbare strenge Fan-Enge. Tatsächlich, sei ρ die Metrik auf X, die die Topologie von X induziert. Seien auch $x \in X$ und $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ eine Folge von Teilmengen von X mit $x \in \bar{A}_n$. Für jede n gibt es $x_n \in A_n$ mit $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n+1}$, sonst $x \notin \bar{A}_n$. Es folgt $x \in \overline{\{x_n : n \in I\}}$ für jede unendliche Teilmenge I von ω, und daher erfüllt die Folge $\langle B_n = \{x_n\} : n \in \omega\rangle$ die in Definition 3.4.1 gestellten Bedingungen. $\square$

Das folgende Beispiel ist analog zum 3.3.10.

Beispiel 3.4.7. Der im Beispiel 3.3.3 definierte Raum S_ω hat keine abzählbare strenge Fan-Enge, weil der keine abzählbare Fan-Enge hat. S_ω ist aber H-separabel, weil jeder Raum mit einer abzählbaren dichten Teilmenge, die aus isolierten Punkten besteht, offensichtlich H-separabel ist.

Jeder H-separable Raum ist separabel, daher hat jeder überabzählbare diskrete Raum abzählbare strenge Fan-Enge, aber ist nicht H-separabel.

Jeder separable Raum $\langle X, \tau \rangle$ mit abzählbarer strenger Fan-Enge ist H-separabel: Seien A_n, $n \in \omega$, dichte Teilmengen von X und $Y = \{y_i : i \in \omega\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X. Dann für jede $i \in \omega$ gibt es eine Folge $\langle B_n^i : n \geq i \rangle$, sodass

$$\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}, U \ni y_i \, \exists n_0 \geq i \, \forall n \geq n_0 \, \big(U \cap B_n^i \neq \emptyset\big) \tag{3.6}$$

gilt. Sei $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Da Y dicht ist, es gibt $i \in \omega$ mit $y_i \in U$. Sei nun $n_0 \geq i$, für die die Gleichung 3.6 gilt. Dann für $B_n := \bigcup_{i \leq n} B_n^i \subset A_n$ haben wir

$$\forall n \geq n_0 \, \big(U \cap B_n \neq \emptyset\big),$$

weil $\forall n \geq n_0 \, \big(U \cap B_n^i \neq \emptyset\big)$ und $B_n^i \subset B_n$.

Jeder separable metrische Raum X ist H-separabel. Dies ergibt sich unmittelbar aus der oben bewiesenen Anmerkung samt dem Beispiel 3.4.6. □

Für metrische separable Räume wurde die Liste der äquivalenten Aussagen aus dem Satz 3.4.3 in [4] auf folgende Weise erweitert:

Satz 3.4.8. *Für einen metrischen separablen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *X^n ist ein Hurewicz-Raum für alle $n \in \omega$, $n \geq 1$;*

(2) *$C_p(X)$ hat abzählbare strenge Fan-Enge;*

(3) *$C_p(X)$ ist ein Reznichenko-Raum und hat abzählbare Fan-Enge; und*

(4) *$C_p(X)$ ist H-separabel.*

Beweis. Die Aussagen (1), (2) und (3) sind für alle vollständig-regulären Räume äquivalent, siehe Satz 3.4.3. Die Schlussfolgerung (2) $\Rightarrow$ (4) folgt aus dem Satz 3.2.3 samt Beispiel 3.4.7: $C_p(X)$ ist H-separabel, weil er separabel nach dem Satz 3.2.3 ist, und abzählbare strenge Fan-Enge hat.

(4) $\Rightarrow$ (1). Laut der Anmerkung 3.4.4 sind die Mengen $A_n = \bigcup\{A_V : V \in \mathcal{V}_n\}$, die wir im Beweis vom Satz 3.4.3 ((2) $\Rightarrow$ (1)) definiert haben, dicht in $C_p(X)$. Daher gibt

es eine Folge $\langle B_n : n \in \omega\rangle$, sodass jede B_n eine endliche Teilmenge von A_n ist, und $C_p(X) = \overline{\bigcup\{B_n : n \in I\}}$ für jede unendliche $I \subset \omega$ gilt. Insbesondere gilt $1 \in \overline{B}$, wobei $B = \bigcup\{B_n : n \in \omega\}$. Es reicht nun den Beweis vom Satz 3.4.3 ((3) $\Rightarrow$ (1)), beginnend mit $1 \notin B$, wortwörtlich zu wiederholen. □

Folgerung 3.4.9. *$C_p(\mathbb{R})$ hat abzählbare strenge Fan-Enge, ist ein Reznichenko-Raum und H-separabel.*

Beweis. $\mathbb{R}^n$ ist σ-kompakt und daher Hurewicz-Raum für alle $n \in \omega$. □

3.5 Quasi-normale Konvergenz und Hurewicz-Räume

Die ersten zwei Begriffe bzw. der dritte Begriff in der folgenden Definition wurden in [6] bzw. [7] eingeführt.

Definition 3.5.1. Sei X ein topologischer Raum.

- Eine Folge $\langle f_n : X \to \mathbb{R} | n \in \omega\rangle$ konvergiert gegen $f : X \to \mathbb{R}$ *quasi-normal*, wenn es eine gegen 0 konvergierende Folge $\langle \varepsilon_n : n \in \omega\rangle$ von reelen Zahlen > 0 gibt, sodass
$$\forall x \in X\, \exists n \in \omega\, \forall k \geq n\, \big(|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon_k\big). \tag{3.7}$$
- X heißt *QN-Raum* (bzw. *mQN-Raum*), wenn jede (monotone) Folge $\langle f_n : X \to \mathbb{R} | n \in \omega\rangle$ von stetigen Funktionen, die gegen 0 punktweise konvergiert[1], konvergiert gegen 0 auch quasi-normal ($f_n \xrightarrow{QN} f$);
- X heißt *wQN-Raum*, wenn jede Folge $\langle f_n : X \to \mathbb{R} | n \in \omega\rangle$ von stetigen Funktionen, die gegen 0 punktweise konvergiert, eine Teilfolge besitzt, die gegen 0 quasi-normal konvergiert. □

Anmerkung 3.5.2. Man könnte auch $mwQN$-Räume auf folgende Weise definieren: *Jede monotone Folge $\langle f_n : X \to \mathbb{R} | n \in \omega\rangle$ von stetigen Funktionen, die gegen 0 punktweise konvergiert, eine Teilfolge besitzt, die gegen 0 quasi-normal konvergiert.*
Es ist aber leicht einzusehen, dass so definierte $mwQN$-Räume einfach mQN-Räume

[1] "Monotone" in diesem Fall bedeutet, dass $\forall x \in X\, \forall n\, \forall k \geq n\, (|f_k(x)| \leq |f_n(x)|)$.

wären, weil jede monotone Folge, die eine gegen 0 quasi-normal konvergierende Teilfolge besitzt, selber gegen 0 quasi-normal konvergiert.

Insbesondere ist jeder wQN-Raum auch ein mQN-Raum. □

Anmerkung 3.5.3. Seien X ein QN- (bzw. wQN-, mQN-)Raum und $h : X \to Y$ eine stetige und surjektive Funktion. Dann ist auch Y ein QN- (bzw. wQN-, mQN-)Raum. Wir werden dies nur für QN-Räume beweisen, die anderen Fälle sind analog. Sei also $\langle g_n : Y \to \mathbb{R} | n \in \omega \rangle$ eine Folge von stetigen Funktionen, die gegen 0 punktwise konvergiert. Dann ist

$$\big\langle f_n := g_n \circ h : X \to \mathbb{R} \mid n \in \omega \big\rangle$$

auch eine Folge von stetigen Funktionen, die gegen 0 punktwise konvergiert. Deshalb gibt es eine gegen 0 konvergierende Folge $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ von reelen Zahlen > 0, sodass (3.7) mit $f \equiv 0$ gilt. Sei nun $y \in Y$. Da f surjektiv ist, gibt es $x \in X$ mit $h(x) = y$, daher $f_k(x) = (g_k \circ h)(x) = g_k(y)$ für alle $k \in \omega$. Aus (3.7) mit $f \equiv 0$ für x ergibt sich nun $\exists n \in \omega \, \forall k \geq n \, \big(|g_k(y)| < \varepsilon_k\big)$. □

Lemma 3.5.4. *Ist $\langle f_n : X \to \mathbb{R} | n \in \omega \rangle$ eine gegen $f : X \to \mathbb{R}$ quasi-normal konvergierende Folge, so lässt sich X als Vereinigung $X = \bigcup_{j \in \omega} F_j$ präsentieren, wobei $\langle F_k : k \in \omega \rangle$ eine steigende Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X ist, und $\langle f_n \restriction F_k : n \in \omega \rangle$ gleichmäßig gegen $f \restriction F_k$ für jede $k \in \omega$ konvergiert.*

Beweis. Sei

$$F_k = \big\{ x \in X \ : \ \forall n \geq k \, \big(|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n\big) \big\} = \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}[-\varepsilon_n, \varepsilon_n].$$

Offensichtlich konvergiert $\langle f_n \restriction F_k : n \in \omega \rangle$ gegen $f \restriction F_k$ gleichmäßig. F_k ist abgeschlossen als eine Schnittmenge der abgeschlossenen Mengen $f_n^{-1}[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$, wobei $n \geq k$. □

Hilfssatz 3.5.5. *Seien X ein Teilraum vom kartesischen Produkt $\mathbb{R}_+^\omega$ mit der Produkttopologie, und $f_n : X \to \mathbb{R}_+$,*

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{\min\{k : x(k) + k \geq n\} + 1},$$

wobei $n \in \omega$. Folgende Aussagen sind äquivalent

(1) *X ist begrenzt;*

(2) $f_n \xrightarrow{\text{QN}} 0$;

(3) *Es gibt eine streng monoton steigende Folge* $\langle k_n : n \in \omega \rangle$ *von natürlichne Zahlen, für die* $f_{k_n} \xrightarrow{\text{QN}} 0$ *gilt.*

Beweis. (2) $\Leftrightarrow$ (3) weil die Folge $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ monoton ist: Wenn $x(k) + k \geq n + 1$, dann $x(k) + k \geq n$, deshalb

$$\min\{k : x(k) + k \geq n + 1\} \geq \min\{k : x(k) + k \geq n\},$$

was $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ impliziert.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sei $b \in \omega^\omega$ eine obere Grenze von X hinsichtlich $\leq^*$, also $x \leq^* b$ für alle $x \in X$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass b streng monoton steigend ist. Wir nehmen einen Punkt $x \in X$ und finden $n_0 \in \omega$, sodass $b(n) \geq x(n)$ für alle $n \geq n_0$. Dann für alle $n > n_0 + \max_{i \leq n_0} x(i)$ gilt

$$f_n(x) = \frac{1}{\min\{k : x(k) + k \geq n\} + 1} = \frac{1}{\min\{k > n_0 : x(k) + k \geq n\} + 1} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\min\{k : b(k) + k \geq n\} + 1}.$$

Die Folge $\langle \epsilon_n := \frac{1}{\min\{k : b(k)+k \geq n\}+1} : n \in \omega \rangle$ ist monoton fallend und konvergiert gegen 0, weil $\epsilon_{b(n)+n+1} = \frac{1}{\min\{k : b(k)+k \geq b(n)+n+1\}+1} \leq \frac{1}{n+2}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ eine gegen 0 konvergierende Folge von reelen Zahlen in $(0, 1)$, sodass (3.7) für $f \equiv 0$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$, sonst ersetzen wir ε_n für $\varepsilon'_n = \sup_{i \geq n} \varepsilon_i \geq \varepsilon_n$. Weiterhin werden wir annehmen, dass $l_n := 1/\varepsilon_n \in \omega$, sonst ersetzen wir ε_n für $\varepsilon'_n = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon_n} \rfloor} \geq \varepsilon_n$ ($\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon_n} \right\rfloor \neq 0$ weil $\varepsilon_n < 1$). Hier ist $\lfloor x \rfloor$ die Abrundungsfunktion, die jeder reellen Zahl x die nächstliegende nicht größere ganze Zahl zuordnet. Dann ist jede monoton steigende $b \in \omega^\omega$, für die $b(l_n) \geq n + 1$ gilt, $n \in \omega$, eine obere Grenze von X hinsichtlich $\leq^*$. (Für jede l gibt es nur endlich viele n mit $l_n = l$, weil $\varepsilon_n = \frac{1}{l_n}$ gegen 0 konvergiert, und daher es so eine steigende $b \in \omega^\omega$ gibt.) Um dies einzusehen, nehmen wir $x \in X$ und finden $i \in \omega$, sodass $|f_n(x)| < \varepsilon_n$ für alle $n \geq i$. Also $\frac{1}{\min\{k : x(k)+k \geq n\}+1} < \varepsilon_n$ für alle $n \geq i$, was äquivalent zu $\min\{k : x(k) + k \geq n\} + 1 > \frac{1}{\varepsilon_n} = l_n$ ist. Die letztere Ungleichung impliziert $x(l_n - 1) \leq x(l_n - 1) + (l_n - 1) < n$. Seien $j > l_i$ und $n > i$ mit der Eigenschaft $l_{n-1} \leq j \leq l_n - 1$. Daraus ergibt sich

$$x(j) \leq x(l_n - 1) < n = (n - 1) + 1 \leq b(l_{n-1}) \leq b(j).$$

□

Folgerung 3.5.6. *Sei X ein mQN-Raum und $f : X \to \mathbb{R}_+^\omega$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f[X]$ begrenzt.*

Beweis. Da Bilder von mQN-Räumen unter stetigen Abbildungen wieder mQN-Räume sind (siehe Anmerkung 3.5.3), ist auch $f[X]$ ein mQN-Raum. Jetzt wenden wir auf $f[X]$ den Hilfssatz 3.5.5. □

Hilfssatz 3.5.5 und Folgerung 3.5.6 wurden in [6] bewiesen.

Als Nächstes werden wir den Satz von Hurewicz [14, S. 197] beweisen, der Folgerung 2.3.7 impliziert.

Satz 3.5.7. *Für einen metrischen separablen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *X ist ein Hurewicz-Raum;*

(2) *$f[X]$ ist begrenzt für jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}_+^\omega$.*

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1). Wir können annehmen, dass X Teilraum eines kompakten Raums Z ist: Jeder metrische separable Raum könnte in $[0,1]^\omega$ eingebettet werden, siehe z. B. [16, Satz 17, S. 171]. Es sei eine Folge $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega \rangle$ offener Überdeckungen von X vorgelegt, die aus offenen Teilmengen von Z bestehen. Wir bezeichnen mit U_n die Vereinigung aller Elemente von $\mathcal{U}_n$. Für jeden Punkt $z \in Z$ sei $f_n(z)$ der Abstand zwischen z und $Z \setminus U_n$, d.h., $\inf\{\rho(z, z') : z' \in Z \setminus U_n\}$, wobei ρ die die kompakte Topologie von Z induzierende Metrik auf Z ist. Falls $U_n = Z$ (äquivalent: $Z \setminus U_n = \emptyset$), setzen wir $f_n \equiv 1$. Dadurch ist auf Z eine Folge $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ von nicht-negativen und stetigen Funktionen definiert, sodass $f_n(x) > 0$ für alle $n \in \omega$ und $x \in X$ gilt. Aus (2) ergibt sich eine monoton steigende $b \in \omega^\omega$, sodass die Ungleichung $\frac{1}{f_n(x)} < b(n)$ in jedem Punkt $x \in X$ für fast alle n gilt. Sei

$$R_n = \big\{x \in Z \ : \ \forall k \geq n \, (\frac{1}{f_k(x)} \leq b(k))\big\} = \big\{x \in Z \ : \ \forall k \geq n \, (f_k(x) \geq \frac{1}{b(k)})\big\},$$

$n \in \omega$. Dann ist $\{R_n : n \in \omega\}$ eine Überdeckung von X, die aus abgeschlossenen (deshalb auch kompakten) Teilräumen von Z besteht. Es gilt weiter $\bigcup_{i \leq n} R_i \subset U_n$. Daher kann man aus $\mathcal{U}_n$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{U}'_n$ herausgreifen, in deren Vereinigung $\cup\mathcal{U}'_n$ der kompakte Teilraum $\bigcup_{i\leq n} R_i$ enthalten ist. Es folgt, dass $x \in \cup\mathcal{U}'_n$ für jeden Punkt $x \in X$ und für fast alle $n \in \omega$ gilt.

(1) $\Rightarrow$ (2). Es sei eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}^\omega_+$ vorgelegt. Es bleibt nur nachzuprüfen, dass die Funktion $h : X \to \omega^\omega$,

$$\forall n \in \omega \ \big(h(x)(n) = \lfloor f(x)(n) \rfloor + 1\big),$$

stetig von oben ist, siehe Folgerung 2.3.7. Seien also $n, m \in \omega$. Dann gilt

$$\{x \in X : h(x)(n) \leq m\} = \{x \in X : \lfloor f(x)(n) \rfloor + 1 \leq m\} = \{x \in X : f(x) < m\},$$

und die letztere Teilmenge von X ist offen, weil f stetig ist. □

Beispiel 3.5.8. Die im Beweis von (1) $\Rightarrow$ (2) definierte Abbildung h könnte tatsächlich nicht stetig sein. Zum Beispiel, betrachten wir den Fall, dass für einen nicht isolierten Punkt $x \in X$ gilt: $f(x)(0) = 1$ und $f(z)(0) < 1$ für alle $z \neq x$. Dann haben wir

$$h(z)(0) = \lfloor f(z)(0) \rfloor + 1 = 1 < h(x)(0) = \lfloor f(x)(0) \rfloor + 1 = 1 + 1 = 2$$

für alle $z \neq x$, daher ist h in dieser Konstellation nicht stetig. □

Folgerung 3.5.9. *Jeder metrische separable mQN-Raum X hat die Überdeckungseigenschaft von Hurewicz.*

Beweis. Sei $f : X \to \mathbb{R}^\omega_+$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f[X]$ begrenzt, siehe Folgerung 3.5.6. Aus dem Satz 3.5.7 ergibt sich nun, dass X ein Hurewicz-Raum ist. □

Jetzt können wir die Relationen zwischen den oben eingeführten Begriffen zusammenfassen, siehe Anmerkung 3.5.2 und Folgerung 3.5.9:

$$QN \implies wQN \implies mQN \implies \text{Hurewicz}$$

Es kann nicht aufgrund der ZFC-Mengenlehre, die ein weithin akzeptierter Rahmen für die ganze Mathematik ist, entschieden werden, ob die erste Implikation umgekehrt werden könnte. Dies folgt aus einer Kombination von vielen Sätzen, die in [9, 6, 11] bewiesen wurden. Wir werden uns aber in dieser Arbeit mit diesen nicht beschäftigen.

Wir werden zeigen, dass die letzte Implikation in der Tat eine Äquivalenz für metrische separable Räume ist, und infolgedessen die zweite Implikation nicht umgekehrt werden kann.

Der folgende Satz wurde in [5] bewiesen. Wir geben einen alternativen Beweis, der von stetigen von oben Abbildungen Gebrauch macht.

Satz 3.5.10. *Für einen metrischen separablen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *X ist ein Hurewicz-Raum;*

(2) *X ist ein mQN-Raum.*

Beweis. Folgerung 3.5.9 gibt uns (2) $\Rightarrow$ (1).

Um (1) $\Rightarrow$ (2) zu beweisen, betrachten wir eine monotone Folge $\langle f_n : X \to \mathbb{R}_+^\omega | n \in \omega \rangle$, die gegen 0 punktwise konvergiert. Wir betrachten die Abbildung $\phi : X \to \omega^\omega$,

$$\phi(x)(k) = \min \big\{ n \in \omega : |f_n(x)| < \frac{1}{k+1} \big\} = \min \big\{ n \in \omega : \forall n' \geq n \, (|f_{n'}(x)| < \frac{1}{k+1}) \big\}$$

(die letztere Gleichung folgt aus der Monotonie der Folge $\langle f_n : n \in \omega \rangle$). ϕ ist stetig von oben: Nehmen wir beliebige $k, m \in \omega$ und betrachten die Menge $U = \{x \in X : \phi(x)(k) \leq m\}$. Somit gilt

$$U = \{x \in \omega : \exists n \leq m (|f_n(x)| < \frac{1}{k+1})\} = \bigcup_{n \leq m} f_n^{-1}(-\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}),$$

deshalb ist U offen als eine Vereinigung offener Mengen, was die Stetigkeit von oben von ϕ beweist.

Aus Folgerung 2.3.7 ergibt sich, dass $\phi[X]$ begrenzt ist, und deshalb gibt es streng monoton steigende Funktion $b \in \omega^\omega$ mit $b(0) = 0$ und $\phi(x) \leq^* b$ für alle $x \in X$. Sei nun $\varepsilon_n = \frac{1}{k+1}$, wobei $n \in \omega$ und k die (einzige) natürliche Zahl ist, sodass $b(k) \leq n < b(k+1)$. Offensichtlich konvergiert die Folge $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ gegen 0. Sei nun $x \in X$ und $k_0 \in \omega$, sodass $\phi(x)(k) \leq b(k)$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Dann für jede $k \geq k_0$ und $b(k) \leq n < b(k+1)$ gilt:

$$|f_n(x)| \leq |f_{b(k)}(x)| \leq |f_{\phi(x)(k)}(x)| < \frac{1}{k+1} = \varepsilon_n.$$

Die ersten zwe Ungleichungen folgen aus der Monotonie der Folge $\langle f_n : n \in \omega \rangle$, die zweite stützt sich auch auf $b(k) \geq \phi(x)(k)$ für alle $k \geq k_0$ und die Definition von ϕ. □

Nächstes Beispiel ergibt sich aus [6, Theorem 4.2].

Beispiel 3.5.11. $\mathbb{R}$ ist kein wQN-Raum. Tatsächlich, Sei $\{q_n : n \in \omega\}$ eine bijektive Aufzählung von $\mathbb{Q}$. Für jede $n \in \omega$ sei $\langle x_{n,m} : m \in \omega \rangle$ eine gegen q_n konvergierend Folge, zum Beispiel $x_{n,m} = q_n + \frac{1}{m}$. Sei $f_{n,m} : \mathbb{R} \to [0, \frac{1}{2^n}]$ eine stetige Funktion, sodass $f_{n,m}(x_{n,m}) = \frac{1}{2^n}$ und $f_{n,m}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_{n,m}| \geq \frac{1}{2}|q_n - x_{n,m}|$ (insbesondere $f_{n,m}(q_n) = 0$). Zum Beispiel, hat die Funktion

$$f_{n,m}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{|x - x_{n,m}|}{\frac{1}{2}|q_n - x_{n,m}|}\right), & |x - x_{n,m}| \leq \frac{1}{2}|q_n - x_{n,m}| \\ 0, & |x - x_{n,m}| \geq \frac{1}{2}|q_n - x_{n,m}| \end{cases}$$

solche Eigenschaften. Sei nun

$$g_m(x) = \sum_{n \in \omega} f_{n,m}(x), \quad \text{wobei } x \in \mathbb{R} \text{ und } m \in \omega.$$

Da $|f_{n,m}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist g_m stetig. Die Folge $\langle g_m : m \in \omega \rangle$ konvergiert gegen 0 punktweise: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $k_0 \in \omega$.

Wir werden zuerst den Fall von $x \notin \{q_i : i \leq k_0\}$. Sei $m_0 \in \omega$ groß genug, sodass $|x - x_{i,m}| \geq \frac{1}{2}|q_i - x_{i,m}|$ für alle $m \geq m_0$ und $i \leq k_0$. Dann haben wir $f_{i,m}(x) = 0$ für alle $i \leq k_0$ und $m \geq m_0$. Deshalb

$$\forall m \geq m_0 \ \Big(g_m(x) = \sum_{i \leq k_0} f_{i,m}(x) + \sum_{i > k_0} f_{i,m}(x) = \sum_{i > k_0} f_{i,m}(x) \leq \sum_{i > k_0} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k_0}}\Big),$$

was angesichts der Beliebigkeit von k_0 die Konvergenz von $\langle f_m(x) : m \in \omega \rangle$ gegen 0 beweist.

Sei nun $x = q_j$ für eine $j \leq k_0$. Sei $m_0 \in \omega$ groß genug, sodass $|x - x_{i,m}| \geq \frac{1}{2}|q_i - x_{i,m}|$ für alle $m \geq m_0$ und $i \leq k_0$, $i \neq j$. Dann haben wir $f_{i,m}(x) = 0$ für alle $i \leq k_0$, $i \neq j$, und $m \geq m_0$. Deshalb

$$\begin{aligned} \forall m \geq m_0 \ \Big(g_m(x) = &\sum_{i \leq k_0, i \neq j} f_{i,m}(x) + f_{j,m}(q_j) + \sum_{i > k_0} f_{i,m}(x) = \\ &= 0 + 0 + \sum_{i > k_0} f_{i,m}(x) \leq \sum_{i > k_0} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k_0}}\Big), \end{aligned}$$

was wieder angesichts der Beliebigkeit von k_0 die Konvergenz von $\langle f_m(x) : m \in \omega \rangle$ gegen 0 beweist.

Angenommen, dass $f_{m_k} \xrightarrow{QN} 0$ für eine streng monoton steigende Folge $\langle m_k : k \in \omega \rangle$ von natürlichen Zahlen. Aus dem Lemma 3.5.4 folgt, dass $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \omega} F_j$, wobei $\langle F_j : j \in \omega \rangle$

eine steigende Folge von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist, und $\langle g_{m_k} \restriction F_j : k \in \omega \rangle$ konvergiert gleichmäßig für jede $j \in \omega$. Nach dem Baireschen Kategoriensatz gibt es $a < b$ und $j \in \omega$, sodass $(a, b) \subset F_j$ gilt, also konvergiert $\langle g_{m_k} \restriction (a, b) : k \in \omega \rangle$ gegen 0 gleichmäßig. Seien $n \in \omega$ und $m_0 \in \omega$, sodass $q_n \in (a, b)$ und $x_{n,m} \in (a, b)$ für alle $m \geq m_0$. Dann für alle $m \geq m_0$ gilt:

$$\sup\{g_m(x) : x \in (a, b)\} \geq g_m(x_{n,m}) \geq f_{n,m}(x_{n,m}) = \frac{1}{2^n},$$

was der gleichmäßigen Konvergenz gegen 0 der Folge $\langle g_{m_k} \restriction (a, b) : k \in \omega \rangle$ widerspricht. □

Folgerung 3.5.12. $\mathbb{R}$ *ist ein mQN- und nicht wQN-Raum.*

Beweis. $\mathbb{R}$ ist σ-kompakt und daher ein Hurewicz-Raum, siehe Beispiel 2.2.4. Nach dem Satz 3.5.10 ist $\mathbb{R}$ ein mQN-Raum. Zusammen mit Beispiel 3.5.11 beweist es unsere Folgerung. □

Kapitel 4

Literaturverzeichnis

[1] Arhangel'skii, A. V., *О некоторых топологических пространствах, встречающихся в функциональном анализе.* (Russisch) [Some topological spaces that arise in functional analysis.] Uspehi Mat. Nauk **31**:5 (1976), 17–32.

[2] Arhangel'skii, A. V., *Пространства Гуревича, аналитические множества и веерная теснота пространств функций.* (Russisch) [Hurewicz spaces, analytic sets and fan tightness of function spaces] Dokl. Akad. Nauk SSSR **287**:3 (1986), 525–528.

[3] Arkhangel'skii, A. V. *Топологические пространства функций.* (Russisch) [Topological function spaces] Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1989, 223 pp. (Englische Übersetzung: Arkhangel'skii, A. V. *Topological function spaces.* Mathematics and its Applications (Soviet Series), 78. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992. x+205 pp.)

[4] Bella, A., Bonanzinga, M., Matveev, M., *Variations of selective separability,* Topology Appl. **156** (2009), 1241–1252.

[5] Bukovský, L.; Haleš, J., *On Hurewicz properties,* Topology Appl. **132**:1 (2003), 71–79.

[6] Bukovsky, L.; Reclaw, I.; Repicky, M., *Spaces not distinguishing pointwise and quasinormal convergence of real functions*, Topology Appl. **41**:1-2 (1991), 25–40.

[7] Bukovsky, L.; Reclaw, I.; Repicky, M., *Spaces not distinguishing convergences of real-valued functions,* Topology Appl. **112**:1 (2001), 13–40.

[8] Chaber, J., Pol, R., *A remark on Fremlin-Miller theorem concerning the Menger property and Michael concentrated sets*, Preprint (2002).

[9] Dow, A., *Two classes of Fréchet-Urysohn spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **108**:1 (1990), 241–247.

[10] Engelking, R. *General topology.* Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989. viii+529 pp.

[11] Galvin, F.; Miller, A.W., *γ-sets and other singular sets of real numbers,* Topology Appl. **17**:2 (1984), 145–155.

[12] Guran, I.; Zarichnyj, M. *Елементи теорії топологічних груп.* (Ukrainisch) [Elements of the theory of topological groups.] Київ: УМК ВО, 1991.-76c.

[13] Hurewicz, W., *Über die Verallgemeinerung des Borellschen Theorems*, Math. Z. **24** (1925), 401–421.

[14] Hurewicz, W., *Über Folgen stetiger Funktionen,* Fund. Math. **9** (1927), 193–204.

[15] Just, W.; Miller, A.W.; Scheepers, M.; Szeptycki, P.J., *The combinatorics of open covers. II,* Topology Appl. **73** (1996), 241–266.

[16] Kelley, J.L.. *Общая топология.* (Russisch) [General topology] Translated from the English by A. V.Arhangel'skii, Edited by P. S. Aleksandrov. Izdat. "Nauka", Moscow 1968, 383 pp.

[17] Kočinac, L.D.R.; Scheepers, M., *Function spaces and a property of Reznichenko,* Topology Appl. **123** (2002), 135–143.

[18] Kočinac, L.D.R.; Scheepers, M., *Combinatorics of open covers. VII. Groupability,* Fund. Math. **179**:2 (2003), 131–155.

[19] Kunen, K., *Set theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. xvi+313 pp.

[20] Mildenberger, H., *Mathematische Logik.* (Skript zur im Sommersemester 2007 in Wien gehaltenen vierstündigen Vorlesung).
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mildenberger/veranstaltungen/ss12/ml2008.pdf`

[21] Menger, K., *Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre, Sitzungsberichte.* Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik (Wiener Akademie) **133** (1924), 421–444.

[22] Nagata, J., *On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces,* Osaka Math. J. **1** (1949), 166–181.

[23] Noble, N., *The density character of function spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 228–233.

[24] Okunev, O.G., *Метод построения M-эквивалентных пространств.* (Russisch) [Methods of constructions of M-equivalent functions.] V Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1985. С. 189

[25] Pytkeev, E. G., *О тесноте пространств непрерывных функций* (Russisch) [Tightness of spaces of continuous functions.] Uspekhi Mat. Nauk **37**:1 (1982), 157–158.

[26] von Querenburg, B., *Mengentheoretische Topologie.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2001. xvii+353 pp.

[27] Scheepers, M., *Combinatorics of open covers. VI. Selectors for sequences of dense sets,* Quaest. Math. **22** (1999), 109–130.

[28] Semadeni, Z. *Banach spaces of continuous functions. Vol. I.* Monografie Matematyczne, Tom 55. PWN-Polish Scientific Publishers,
Warsaw, 1971. 584 pp.

[29] Szewczak, P.; Tsaban, B., *Products of Menger spaces: a combinatorial approach*, Ann. Pure Appl. Logic **168**:1 (2017), 1–18.