# THEMEN FÜR BACHELOR-ARBEITEN AM KGRC

KURT GÖDEL RESEARCH CENTER FOR MATHEMATICAL LOGIC

## Geplanter Ablauf

Die Bachelor-Seminare (Seminar und Projektseminar) werden nicht am KGRC, sondern am Mathematik-Institut abgehalten. Wir planen, Themen aus der Mathematischen Logik anzubieten, und einige Studierende bei den Seminaren mitzubetreuen, in Absprache mit den Lehrveranstaltungsleiterinnen und -leitern des Seminars.

D.h., wir betreuen die Erstellung der Seminar-Arbeit und den Seminarvortrag des Studenten oder der Studentin. Die Lehrveranstaltung selbst wird aber nicht von uns angeboten oder geleitet.

Um bei uns eine Seminar-Arbeit zu schreiben, müssen Sie jedenfalls die Vorlesung *Grundbegriffe der Mathematischen Logik* erfolgreich absolviert haben.

Bei Interesse wenden Sie sich bitte and uns oder an die Lehrveranstaltungsleiter des Bachelor(projekt)seminars.

## Mögliche Themen

Die folgenden Themen sind nur Beispiele. Die Schwierigkeitsgrade sind sehr unterschiedlich. Es ist keinesfalls garantiert, dass wir jedes dieser Themen betreuen, und wir können (nach Anfrage) auch Themen betreuen die nicht in der Liste vorkommen. Die Betreuung erfolgt jedenfalls immer nur nach Maßgabe unser freien Lehr-Kapazität.

### Themen aus der naiven Mengenlehre.

- Kardinalzahlen: Die verschiedenen Unendlichkeiten in der Mathematik.
  Definitionen von gleichgross und kleiner-gleich ($|A| \leq |B|$), Cantor'sche Diagonalisierung (es gibt mehr reelle Zahlen as natürliche), Schröder-Bernstein-Satz ($|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ impliziert $|A| = |B|$), die Bedeutung des Auswahlaxioms (je zwei Mengen sind vergleichbar). Einfache Folgerungen aus dem Auswahlaxiom (es gibt nicht berechenbare Funktionen, nicht algebraische Zahlen, ...).
- Das Auswahlaxiom.
  Äquivalenzen (Zorn'sches Lemma; Wohlordnungssatz; das Produkt nicht leerer Mengen ist nicht leer; jeder Vektorraum hat eine Basis; ...). Andere Folgerungen (nicht messbare Mengen, ...). Das Auswahlaxiom als Axiom der Mathematik oder der Logik? (Endliche Auswahl wird durch die Logik garantiert. Was passiert in Logiken mit unendlich langen Formeln?) Varianten des Auswahlaxioms (countable choice, dependend choice).
- Unendliche Kombinatorik, Satz von Ramsey.
  Ein bekannter Satz der endlichen Kombinatorik besagt informal: In jeder Gruppe von 6 Personen gibt es 3 Personen, die einander alle paarweise nicht kennen oder alle paarweise kennen. Allgemein gibt es $n(m, k, l)$, so dass für jede Färbung der $m$-Tupel einer $n(m, k, l)$-elementigen Menge $A$

*Date*: Stand: Juli 2007.

eine $l$-elementige homogene Teilmenge $B \subseteq A$ existiert. Diese Sätze haben verschiedene unendliche Versionen.

**Axiomatische Mengenlehre.**

- ZFC (Das erststufige Axiomensystem der Mengenlehre).
  Die Notwendigkeit der Axiomatisierung (Russell'sches Paradoxon), Nachteile der erststufigen Axiomatisierung, Unvollständigkeit, echte Klassen, die Klassen der Ordinalzahlen und Kardinalzahlen.
- Spiele.
  Definition eines unendlichen Spieles, Determiniertheit von Spielen mit offenen und abgeschlossenen (und sogar Borel) Gewinnmengen, das Banach-Mazur-Spiel, Folgerung der Existenz einer perfekten Teilmenge oder der Baire-Eigenschaft aus der Determiniertheit, nicht determinierte Spiele (Ultrafilter, Auswahlaxiom), Axiom of Determinacy (AD).
- Größere Kardinalzahlen.
  In gewissem Sinn kann man ZFC als die Erweiterung von PA (der erststufigen Axiomatisierung eines bestimmten rekursiv aufzählbaren Teils der Zahlentheorie) auffassen, bei der die Existenz einer unendlichen Menge angenommen wird. Daraus folgt die Existenz (Klassen-)vieler weiterer Unendlichkeiten (Kardinalitäten), z.b. $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$ etc. Es gibt allerdings (möglicherweise) auch Kardinalitäten, die noch viel größer als all diese „konstruierbaren" Kardinalitäten sind, z.B. unerreichbare Kardinalzahlen. Die Existenz solcher Zahlen ist aber konsistenzmäßig größer als die Konsistenz von ZFC. Beweise, daß Con(ZFC+Inacc) nicht aus Con(ZFC) folgen kann (mit Hilfe des Unvollständigkeitssatzes). Andere große Kardinalzahlen können ebenfalls untersucht werden, wie z.B. Mahlo, schwach kompakt oder messbar.

**Mehr naive Mengenlehre: Reelle Zahlen, Maß und Kategorie.**

- Darstellungen der reellen Zahlen.
  Folgende Objekte können alle als eine Version des Kontinuums interpretiert werden: Die 0-1 Folgen in $2^\omega$, Folgen natürlicher Zahlen $\omega^\omega$ , das abgeschlossene Intervall $[0,1]$, das offene Intervall $(0,1)$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, verschiedene Spiele. Untersuche, inwieweit sich diese Darstellungen unterscheiden bzw. ähneln (Kardinalität, maßtheoretisch, topologisch, ...).
- Polnische Räume und projektive Mengen.
  Definiere polnische Räume, die Borel-Hierarchie und analytische Mengen. Es gibt universelle offene und analytische Mengen, aber keine universellen Borelmengen. Je zwei perfekte polnische Räume sind Borel-äquivalent.
- Das Banach-Tarski-Paradoxon.
  Eine Folgerung des Auswahlaxioms: Eine Kudel mit Radius 1 im dreidimensionalen Raum kann in 5 Teile zerteilt werden und jeder der Teile kann so rotiert und verschoben werden, dass sich daraus eine Kugel mit Radius 2 ergibt. Folgerungen für mögliche Maßbegriffe im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, vergleich mit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.
- Folgerungen aus der Kontinuumshypothese. (Das erste Hilbert'sche Problem.)
  Die Kontinuumshypothese CH ist (in ZFC) unentscheidbar. Aus CH folgen sehr einfach viele attraktive mathematische Resultate (viele davon stellen sich ebenfalls als unentscheidbar heraus). Beispiele: Es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $f^{-1}(f(x)) = x$ und so daß $A$ eine Nullmenge ist gdw $f[A]$ mager ist. Es gibt eine eine überabzählbare Menge $M$, so dass jede Lebesgue-Nullmenge $N \subseteq M$ abzählbar ist, analoges gilt auch für Mengen erster Kategorie (magere Mengen) anstelle von Nullmengen. Begründe,

warum man für folgendes CH nicht benötigt: Es gibt eine überabzählbare Menge ohne perfekte Teilmenge.

- Der Satz von Cantor Bendixon, Cantormengen.
  Zeige: Jede perfekte Menge hat Kardinalität $2^{\aleph_0}$, und jede überabzählbare abgeschlossene Menge enthält eine perfekte Menge. Die Cantormenge ist eine überabzählbare, perfekte, magere Nullmenge. Konstruiere analoge nicht-Nullmengen und zeige damit: Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine messbare Menge $A$, so dass $f^{-1}(A)$ nicht messbar ist.
- Martins Axiom (MA) und das Suslin-Problem.
  Definiere (das unentscheidbare Prinzip) MA und beweise damit: $\mathbb{R}$ ist die einzige vollständige, dichte, unbegrenzte lineare Ordnung ohne überabzählbare disjunkte Familie offener Mengen.

**Die Logik erster Stufe.**

- Syntax, Semantik und der Vollständigkeitssatz.
  Untersuche, welche mathematischen Tatsachen sich in der Sprache der ersten Stufe (durch einzelne Formeln oder durch unendliche Satzmengen) ausdrücken lassen und welche nicht. Beschreibe die Unterschiede zwischen Syntax und Semantik (insbesondere die Komplexität des Folgerungsbegriffs). Beschreibe die Bedeutung des Vollständigkeitssatzes.
- Der Unvollständigkeitssatz.
  Der Gödel'sche Unvollständigkeitssatz kann wie folgt formuliert werden: Es gibt keine vollständige rekursivere Axiomatisierung der Zahlentheorie der ersten Stufe in der Sprache $0, 1, +, \cdot$ (d.h. $\{\varphi : \mathbb{N} \vDash \varphi\}$). Skizziere den Beweis des Unvollständigkeitssatzes.
- Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen und der reell abgeschlossenen Körper.
  Im Gegensatz zum Unvollständigkeitssatz ist die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper beziehungsweise der reell abgeschlossenen Körper in der Sprache $0, 1, +, \cdot$ (bzw $0, 1, +, \cdot, <$) sehr wohl vollständig rekursiv axiomatisierbar. Skizzierre einen Beweis. (Benötigt Elemente der Algebra, insbesonders Sturmsche Ketten.)
- Presburger Arithmetik.
  Im Gegensatz zum Unvollständigkeitssatz ist die Zahlentheorie in der Sprache $0, 1, +$ oder $0, 1, \cdot$ vollständig axiomatisierbar. Das mag auf den ersten Blick nicht überraschend erscheinen, weil diese Sprache sehr schwach aussieht. Es läßt sich aber (wie auch bei den reell abgeschlossenen Körpern) beweisen, das die worst-case Laufzeit jedes Entscheidungsverfahrens notwendigerweise exponentiell sein muß.

**Beweistheorie.**

- Peano-Arithmetik (PA).
  Untersuche die Theore PA und konservative Erweiterungen von PA in der Sprache zweiter Stufe.. Für große Teile der „üblichen" Mathematik ist PA ausreichend, für einige Beispiele kann man allerdings zeigen, dass unendliche Mengen notwendig sind: Die Sätze von Paris und Harrington und von Goodstein, das Hydra-Problem, etc.
- Schnittelimination.
  Beweise Schnittelimination im Kalkül LK, schätze das Formelwachstum ab und argumentiere, warum aus der Schnittelimination keine Entscheidbarkeit folgt.
- Konstruktivismus und Intuitionismus.
  Analysiere Beispiele für „nichtkonstruktive" Beweise in der Mathematik,

im speziellen: Tertium non datur (indirekter Beweis), unendliche Mengen, Auswahlaxiom. Argumentiere, inwieweit ein konstruktiver Beweis besser ist als ein nichtkonstruktiver. Es gibt verschiedene alternative Systeme der Mathematik, die manche nichtkonstruktiven Methoden ablehnen, z.B. Intuitionismus. Präsentiere Gödels Beweis der intuitionistischen Beweisbarkeit der doppelten Negation einer klassischen Formel und analysiere die Folgerungen für Konsistenzüberlegungen.

**Rekursionstheorie.**

- Äquivalenz der natürlichen Maschinenmodelle:
  Zeige die Äquivalenz (und Robustheit unter verschiedenen Komplexitätsklassen) der folgenden Maschinenmodelle: Universelle Registermaschine, Turingmaschine, $\mu$-Rekursion.
- Das P-NP-Problem.
  Definiere das P-NP-Problem, beschreibe einige NP-Algorithmen und zeige die NP-Vollständigkeit der aussagenlogischen Erfüllbarkeit.
- Orakel, die Turinggrade.
  Es gibt unentscheidbare Probleme, z.B. das Halteproblem $H$. Man kann eine neues Maschinenmodell $M$ definieren, in dem die Entscheidung $n \in H$ als Grundfunktion zur Verfügung steht. Diese Maschine $M$ kann offenbar mehr berechnen als eine Turingmaschine, aber offenbar auch nicht alles: So hat $M$ ihr eigenes $M$-unentscheidbares Halteproblem. Das führt zu einer partiellen Ordnung der Grade der Unberechenbarkeit.
- Das Wortproblem in Gruppen ist unentscheidbar. (D.h. die Frage „$G$ sei die Gruppe definiert durch die Erzeuger $a_1, \ldots, a_n$ und die Gleichungen $t_1 = 0, \ldots, t_n = 0$. Ist der Term $t_1$ gleich dem Term $t_2$?" ist algorithmisch unentscheidbar.) Skizziere den Beweis.
- (Hilberts 10. Problem) Es gibt keinen Algorithmus, der allgemeine Diophantische Gleichungen löst. (D.h. die Frage „Hat das Polynom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Lösung?" ist algorithmisch unentscheidbar.) Skizziere den Beweis.

**Modelltheorie.**

- Beweise: Es gibt keine Theorie $T$, die genau drei nicht isomorphe abzählbare Modelle hat.
- Beweise den Hilbert'schen Nullstellensatz mit Methoden aus der Modelltheorie.

*URL*: `http://www.logic.univie.ac.at/`