Grundbegriffe der Mathematischen Logik, Sommersemester 2011
Prüfungsteil II (Prädikatenlogik), 22. Juni 2011, 13:00–14:30

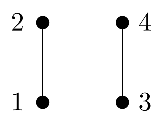
Name: **Matrikelnummer/Studienkennzahl:**

Ja-Nein-Fragen

*Bitte tragen Sie in die Kästchen **W** (wahr) oder **F** (falsch) ein. Eine richtige Antwort zählt 2 Punkte, eine falsche 0 Punkte. Eine unbeantwortete Frage zählt 1 Punkt, damit Sie im Mittel keinen Nachteil haben, wenn Sie nicht raten.*

In den Fragen steht σ für eine beliebige Signatur.
σ_N ist die Signatur mit $\sigma_N^{\mathrm{Op}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \boldsymbol{\cdot}\}$, $\sigma_N^{\mathrm{Rel}} = \{\mathtt{<}\}$, wobei $\mathtt{0}$ und $\mathtt{1}$ nullstellig sind und $\mathtt{+}$, $\boldsymbol{\cdot}$ und $\mathtt{<}$ zweistellig. $\mathbb{N}$ steht sowohl für die natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$ als auch für die σ_N-Struktur $(\mathbb{N}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \boldsymbol{\cdot}, \mathtt{<})$.
σ_E ist die Signatur mit $\sigma_E^{\mathrm{Op}} = \emptyset$, $\sigma_E^{\mathrm{Rel}} = \{E\}$ und $\mathrm{ar}_E(E) = 2$.

1. Wenn σ eine Signatur ohne Relationssymbole ist, ist jeder σ-Term eine σ-Formel. .... ☐
2. Es gibt eine Signatur σ, so dass $\mathtt{\neg\wedge{+}{+}}$ eine σ-Formel ist. .... ☐
3. Wenn t ein σ-Term ist, dann ist $\mathtt{\wedge}tt$ eine σ-Formel. .... ☐
4. Wenn $\mathtt{\wedge{=}01}$ eine σ-Formel ist, dann ist auch $\mathtt{==}$ eine σ-Formel. .... ☐
5. Es gibt eine aussagenlogische Tautologie φ und eine Belegung β der aussagenlogischen Prädikate, so dass $\bar{\beta}(\varphi) = 0$ ist. .... ☐
6. $\mathtt{(\exists\overset{0}{p}(\overset{0}{p}\vee\overset{1}{p}))}$ ist eine Formel der Aussagenlogik in polnischer Notation. .... ☐
7. Aus dem Unvollständigkeitssatz folgt, dass es einen σ_N-Satz φ gibt, so dass weder $\mathbb{N} \models \varphi$ noch $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ gilt. .... ☐
8. Ob eine Formel der Aussagenlogik eine Tautologie ist, kann man durch endliche Fallunterscheidung und Einsetzen überprüfen. .... ☐
9. Die σ-Formel $\mathtt{\neg\wedge{=}\overset{0}{x}\overset{1}{x}\neg{=}\overset{0}{x}\overset{1}{x}}$ ist eine Tautologie der Prädikatenlogik 1. Stufe. .... ☐
10. Die σ-Formel $\mathtt{\neg\wedge{=}\overset{0}{x}\overset{1}{x}\neg{=}\overset{1}{x}\overset{0}{x}}$ ist ein Gleichheitsaxiom. .... ☐
11. Die σ_N-Formel $\mathtt{={+}1{+}11{+}{+}111}$ ist beweisbar. .... ☐
12. Die σ_N-Formel $\mathtt{\neg\wedge{=}\overset{2}{x}{+}\boldsymbol{\cdot}\overset{1}{x}\overset{1}{x}\overset{1}{x}\neg\exists\overset{3}{x}{=}\overset{2}{x}{+}\overset{3}{x}\overset{1}{x}}$ ist beweisbar. .... ☐
13. Sei G der unten abgebildete Graph als σ_E-Struktur codiert, d.h. $\underline{G} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathsf{E}^G = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Dann gilt $G \models \mathtt{\neg\exists\overset{0}{x}\exists\overset{1}{x}\exists\overset{2}{x}\wedge E\overset{0}{x}\overset{1}{x}E\overset{1}{x}\overset{2}{x}}$. .... ☐
14. Sei G der unten abgebildete Graph als σ_E-Struktur codiert, d.h. $\underline{G} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathsf{E}^G = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Dann gilt $G \models \mathtt{\exists\overset{0}{x}\neg\exists\overset{1}{x}E\overset{0}{x}\overset{1}{x}}$. .... ☐



G

Bitte wenden!

Fragen mit offenen Antworten

Jede Frage zählt 2 Punkte. Für partielle oder fast richtige Lösungen gibt es evt. 1 Punkt.

15. $\mathtt{\neg\wedge\overset{1}{p}\vee\overset{2}{p}\neg\overset{3}{p}}$ ist eine Formel der Aussagenlogik in polnischer Notation. Übersetzen Sie sie in eine gleichwertige Formel der Aussagenlogik in Infix-Notation. ....

16. Geben Sie $\varphi[\frac{t}{y}]$ an, falls $\varphi = \mathtt{\exists\overset{1}{x}{=}\overset{1}{x}\overset{0}{x}}$, $t = \mathtt{+\overset{2}{x}\overset{3}{x}}$ und $y = \mathtt{\overset{0}{x}}$. ....

17. Geben Sie eine Signatur σ an, so dass $\mathtt{42}$ (eine Zeichenkette der Länge 2!) eine σ-Formel ist.

18. Sei σ eine Signatur mit einem einstelligen Operationssymbol $\mathtt{f}$, und sei

$$\varphi = \mathtt{\neg\exists\overset{0}{x}\exists\overset{1}{x}\wedge{=}f\overset{0}{x}f\overset{1}{x}\neg{=}\overset{0}{x}\overset{1}{x}}$$

$$\psi = \mathtt{\exists\overset{1}{x}\neg\exists\overset{0}{x}{=}\overset{1}{x}f\overset{0}{x}}$$

Beweisen Sie, dass die Grundmenge $\underline{M}$ jedes Modells $M \models \mathtt{\wedge}\varphi\psi$ mindestens 7 Elemente enthält.

(Druckfehler in Aufgabe 18 nachträglich korrigiert. Der zweite Existenzquantor in φ fehlte.)