Kapitel 4

Prädikatenlogik der 1. Stufe

4.1 Beweisbarkeit

Definition 4.1 *Eine σ-Formel φ heißt* erfüllbar*, falls es eine σ-Struktur M und eine Belegung β der Variablen in M gibt, so dass $\hat{\beta}(\varphi) = 1$ ist. Sie heißt* allgemeingültig *(oder logisch allgemeingültig), falls für jede σ-Struktur M und jede Belegung β in M gilt: $\hat{\beta}(\varphi) = 1$.*

Definition 4.2 (Substitution) *Die σ-Formel, die man aus einer σ-Formel φ erhält, indem man ähnlich zu Definition 2.9 jedes freie Vorkommen einer Variable $x \in \mathbb{X}$ durch denselben σ-Term t ersetzt, bezeichnen wir mit $\varphi[\frac{t}{x}]$. Formal ist $\varphi[\frac{t}{x}]$ wie folgt rekursiv definiert:*

- $(\mathtt{=}t_1t_2)[\frac{t}{x}] = \mathtt{=}(t_1[\frac{t}{x}])(t_2[\frac{t}{x}])$.
- $(Rt_1 \ldots t_k)[\frac{t}{x}] = R(t_1[\frac{t}{x}]) \ldots (t_k[\frac{t}{x}])$.
- $(\neg\varphi[\frac{t}{x}]) = \neg(\varphi[\frac{t}{x}])$.
- $(\wedge\varphi\psi)[\frac{t}{x}] = \wedge\varphi[\frac{t}{x}]\psi[\frac{t}{x}]$.
- $(\exists y\varphi[\frac{t}{x}]) = \exists y(\varphi[\frac{t}{x}])$ *falls $y \neq x$.*
- $(\exists x\varphi[\frac{t}{x}]) = \exists x\varphi$ *falls $y = x$.*

Lemma 4.3 (Substitutionslemma für Formeln) *Sei σ eine Signatur, M eine σ-Struktur, $\beta\colon \mathbb{X} \to \underline{M}$ eine Belegung in M, $x \in V$ eine Variable, t ein σ-Term, dessen Variablen nicht in φ vorkommen, und φ eine σ-Formel. Dann ist $\hat{\beta}(\varphi[\frac{t}{x}]) = (\hat{\beta}[\frac{\bar{\beta}(t)}{x}](\varphi)$.*

Beweis Durch Induktion über den Aufbau von φ. ∎

Definition 4.4 *Die beweisbaren σ-Formeln sind die kleinste Menge Φ von σ-Formeln, so dass gilt:*

- (Verallgemeinerte) Tautologien: *Wenn man in einer Tautologie der Aussagenlogik (allenfalls in einer erweiterten Signatur) alle Prädikate durch σ-Formeln ersetzt, so dass dasselbe Prädikat durch dieselbe Formel ersetzt wird, dann ist die resultierende Formel in Φ. Die Formeln der Prädikatenlogik, die man auf diese Weise erhält, nennen wir*
- Modus ponens: *Wenn φ und $\neg\wedge\varphi\neg\psi$ in Φ sind, dann auch ψ.*
- Gleichheitsaxiome: *Die folgenden Formeln sind in Φ:*
  - $\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}$
  - $\neg\wedge\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}\neg\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}$
  - $\neg\wedge\wedge\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}\neg\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}$
  - $\neg\wedge^k\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{k+1}{\mathtt{x}}\mathtt{=}\overset{2}{\mathtt{x}}\overset{k+2}{\mathtt{x}}\ldots\mathtt{=}\overset{k}{\mathtt{x}}\overset{2k}{\mathtt{x}}\neg\mathtt{=}f\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}\ldots\overset{k}{\mathtt{x}}f\overset{k+1}{\mathtt{x}}\overset{k+2}{\mathtt{x}}\ldots\overset{2k}{\mathtt{x}}$ *für jedes k-stellige Operationssymbol $f \in \sigma^{\mathrm{Op}}$*
  - $\neg\wedge^k\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{k+1}{\mathtt{x}}\mathtt{=}\overset{2}{\mathtt{x}}\overset{k+2}{\mathtt{x}}\ldots\mathtt{=}\overset{k}{\mathtt{x}}\overset{2k}{\mathtt{x}}\wedge R\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}\ldots\overset{k}{\mathtt{x}}\neg R\overset{k+1}{\mathtt{x}}\overset{k+2}{\mathtt{x}}\ldots\overset{2k}{\mathtt{x}}$ *für jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma^{\mathrm{Rel}}$.*

- Existenzaxiome: *Für jede σ-Formel φ, jeden σ-Term t, dessen Variable nicht in φ vorkommen, und jede Variable $x \in \mathbb{X}$ ist auch $\neg\wedge(\varphi[\frac{t}{x}])\neg\exists x\varphi$ in Φ.*

- Existenzeinführung: *Wenn $\neg\wedge\varphi\neg\psi$ in Φ ist und die Variable x in ψ nicht frei vorkommt, dann ist auch $\neg\wedge\exists x\varphi\neg\psi$ in Φ.*

Satz 4.5 (Korrektheitssatz) *Jede beweisbare σ-Formel ist allgemeingültig.*

Beweis Man überprüft, dass die Menge Φ der allgemeingültigen Formeln die in der Definition geforderten Eigenschaften hat. Sie enthält daher mindestens die beweisbaren Formeln. ∎

Beweisbarkeit ist also eine (einseitige) Näherung für Allgemeingültigkeit. Ihr Nutzen ergibt sich aus der rekursiven Aufzählbarkeit der beweisbaren Formeln:

Satz 4.6 *Sei σ eine endliche Signatur, und sei $\alpha\colon \mathbb{N} \to A = \sigma^{\mathrm{Op}} \cup \sigma^{\mathrm{Rel}} \cup \{\mathtt{=}, \exists, \neg, \wedge\} \cup \mathbb{X}$ eine Aufzählung des Alphabets A. Sei $\ulcorner\varphi\urcorner = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle \in \mathbb{N}$ für jede Zeichenkette $\varphi = a_1 a_2 \ldots a_k \in A^k$. Dann ist $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \text{ beweisbare } \sigma\text{-Formel}\} \subseteq \mathbb{N}$ eine rekursiv aufzählbare Menge.*

Beweis … ∎

Bemerkung 4.7 *Wenn φ und ψ beweisbar sind, dann auch $\wedge\varphi\psi$.*

Beweis Weil φ und die Tautologie $\neg\wedge\varphi\neg\neg\wedge\psi\neg\wedge\varphi\psi$ beweisbar sind, ist mittels modus ponens auch $\neg\wedge\psi\neg\wedge\varphi\psi$ beweisbar. Weil ψ und $\neg\wedge\psi\neg\wedge\varphi\psi$ beweisbar sind, ist mittels modus ponens auch $\wedge\varphi\psi$ beweisbar. ∎

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass Beweisbarkeit sogar äquivalent zu Allgemeingültigkeit ist. Dadurch erhalten wir das gar nicht offensichtliche Resultat, dass die Menge der allgemeingültigen Formeln rekursiv aufzählbar ist.

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 4.1 *Sei σ eine beliebige Signatur. Wir betrachten die folgenden σ-Sätze:*

- $\varphi = \neg\wedge\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}\neg\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}$.
- $\varphi = \neg\wedge\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}\neg\exists\overset{1}{\mathtt{x}}\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}$.
- $\varphi = \neg\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\neg\mathtt{=}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}$.

Zeigen Sie jeweils, dass für alle σ-Strukturen M gilt: $M \models \varphi$. Beweisen Sie für jeden der Sätze, dass er eine Tautologie ist bzw. dass er es nicht ist.

Übungsaufgabe 4.2 *Sei σ eine beliebige Signatur. Zeigen Sie, dass beim Existenzaxiom die Einschränkung, dass die Variablen von t nicht in φ vorkommen, nötig ist, indem Sie für die σ-Formel $\varphi = \neg\exists\overset{1}{\mathtt{x}}\neg\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}$ eine σ-Struktur angeben, in der die Formel $\neg\wedge\varphi[\frac{\overset{1}{\mathtt{x}}}{\overset{0}{\mathtt{x}}}]\neg\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\varphi = \neg\wedge\neg\exists\overset{1}{\mathtt{x}}\neg\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}\neg\neg\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\neg\exists\overset{1}{\mathtt{x}}\neg\mathtt{=}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}$ nicht gilt.*

Übungsaufgabe 4.3 *Sei σ die Signatur mit $\sigma^{\mathrm{Op}} = \emptyset$, $\sigma^{\mathrm{Rel}} = \{\mathtt{I}\}$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{I}) = 2$. Wir betrachten die σ-Struktur M mit*

$$\begin{aligned}\underline{M} = \{&1, 2, 3, 4, 6, \textit{Karlsplatz}, \textit{Stephansplatz}, \textit{Schwedenplatz}, \textit{Praterstern},\\ &\textit{Landstraße}, \textit{Volkstheater}, \textit{Schottenring}, \textit{Westbahnhof}, \textit{Längenfeldgasse}, \textit{Spittelau}\},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathtt{I}^M = \{&\{1, \textit{Karlsplatz}\}, \{1, \textit{Stephansplatz}\}, \{1, \textit{Schwedenplatz}\}, \{1, \textit{Praterstern}\},\\ &\{2, \textit{Karlsplatz}\}, \{2, \textit{Volkstheater}\}, \{2, \textit{Schottenring}\}, \{2, \textit{Praterstern}\},\\ &\{3, \textit{Landstraße}\}, \{3, \textit{Stephansplatz}\}, \{3, \textit{Volkstheater}\}, \{3, \textit{Westbahnhof}\},\\ &\{4, \textit{Längenfeldgasse}\}, \{4, \textit{Karlsplatz}\}, \{4, \textit{Landstraße}\}, \{4, \textit{Schwedenplatz}\},\\ &\{4, \textit{Schottenring}\}, \{4, \textit{Spittelau}\}, \{6, \textit{Längenfeldgasse}\}, \{6, \textit{Westbahnhof}\},\\ &\{6, \textit{Spittelau}\}\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie: $M \models \exists\overset{0}{\mathtt{x}}\exists\overset{1}{\mathtt{x}}\neg\exists\overset{2}{\mathtt{x}}\exists\overset{3}{\mathtt{x}}\exists\overset{4}{\mathtt{x}}\wedge\wedge\wedge\mathtt{I}\overset{3}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}\mathtt{I}\overset{3}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}\mathtt{I}\overset{4}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}\mathtt{I}\overset{4}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}$. (Hinweis: Wenn man mit der U-Bahn vom Westbahnhof zum Praterstern fährt, muss man zweimal umsteigen.)