Minimalismes

Hans Adler
Leeds

Mai 2008

Résumé

Une relation D est une relation quaternaire sur un sous-ensemble d'un arbre généralisé, signifiant : Les intervalles [a,b] et [c,d] sont disjoints. Munies d'une topologie définissable naturelle, les théories D-minimales comprennent les théories fortement minimales, o-minimales et C-minimales. Les théories faiblement D-minimales sont précisément ceux dont les ensembles unaires définissables avec des paramètres le sont comme combinaisons booléennes d'instances d'une seule famille de formules qui est unidimensionnelle dans le sens (dual) de Vapnik et Chervonenkis. En utilisant la décomposition helvéticofromagière des ensembles unaires, on montre facilement que les théories faiblement D-minimales sont dp-minimales. En autres mots : Elles n'ont ni la propriété d'indépendance, ni de types unaires dont le prépoids (généralisé) excède 1.

Théorie D-minimale

Théorie munie d'une relation D . . .

(D1) $D(a, b; c, d) \Rightarrow D(b, a; c, d) \wedge D(c, d; a, b)$.
(D2) $D(a, b; c, d) \Rightarrow \neg D(a, c; b, d)$.
(D3) $D(a, b; c, d) \Rightarrow D(a, e; c, d) \vee D(a, b; c, e)$.

. . . qui définit une topologie.

Les <u>cônes</u> : $D(x, b; c, d)^M$.

La topologie est générée par les cônes comme sous-base : Les ouverts sont les unions d'intersections finies de cônes.

La théorie doit être «minimale».

Les ensembles $X \subseteq M$ définissables avec paramètres sont précisément les combinaisons booléennes de cônes.

Dimension Vapnik-Chervonenkis

En générale ...

$\Omega \subseteq \mathcal{P}(M)$ <u>pulvérise</u> $X \subseteq M$:

$$\Omega \restriction X = \mathcal{P}(X).$$

$$\dim_{VC} \Omega = \max\Big\{ |X| \;\Big|\; \Omega \text{ pulvérise } X \Big\}.$$

... et pour formules.

$$\dim_{VC} \varphi(\bar{x};\bar{y}) = \dim_{VC} \Big\{ \varphi(\bar{x};\bar{b})^M \;\Big|\; \bar{b} \in M \Big\}.$$

$$\dim^{op}_{VC} \varphi(\bar{x};\bar{y}) = \dim_{VC} \Big\{ \varphi(\bar{a};\bar{y})^M \;\Big|\; \bar{a} \in M \Big\}.$$

φ a la <u>propriété d'indépendance</u> :
- $\dim_{VC} \varphi = \infty$, ou
- $\dim^{op}_{VC} \varphi = \infty$

(deux conditions équivalentes).

T a la propriété d'indépendance si une formule l'a.

Formule VC-minimale

$\dim_{VC}^{op} \varphi(x;\bar{y}) = 0 \iff$
chaque instance $\varphi(x;\bar{b})$ est triviale.

$\dim_{VC}^{op} \varphi(x;\bar{y}) \leq 1 \iff$
pour tous $A = \varphi(x;\bar{b}_1)^M$, $B = \varphi(x;\bar{b}_2)^M$:
$A \subseteq B$, $A \supseteq B$, $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cup B = M$.

φ est <u>VC-minimale</u> si $\dim_{VC}^{op} \varphi = 1$.

Théorie VC-minimale

Théorie munie d'une famille VC-minimale de formules $\varphi_i(x, \bar{y}_i)$. Les ensembles $X \subseteq M$ définissables avec paramètres sont précisément les combinaisons booléennes d'instances $\varphi_i(x;\bar{b})^M$.

On peut définir une relation D :
$D(a, b; c, d) \iff$
il y a une instance $A = \varphi_i(x;\bar{e})^M$ telle que
$a, b \in M$, $c, d \notin M$ ou $a, b \notin M$, $c, d \in M$.
En générale, cette relation n'est pas définissable en premier ordre, mais $\neg D$ est toujours type-définissable.

Théorie faiblement D-minimale

Théorie munie d'un type (incomplet) $p(x, y; z, w)$, dont le complément définit une relation D.

Cône généralisé : $A = \varphi_i(x; \bar{e})^M$ tel que pour tous $a, b \in A$, $c, d \notin A$ on a $D(a, b; c, d)$.

Les ensembles $X \subseteq M$ définissables avec paramètres sont précisément les combinaisons booléennes des cônes généralisés.

VC-minimalité = D-minimalité faible

Pour une théorie VC-minimale, les instances de la famille VC-minimale sont des cônes généralisés. Pour une théorie faiblement D-minimale, les cônes généralisés forment une famille VC-minimale dont la relation D est la relation originale.

Poids généralisé

charge$(p(x)) = \sup \kappa$ tels qu'il y a une configuration comme suit :

- $\varphi^i(x, \bar{y}^i) \quad (i < \kappa)$.
- $(\bar{b}^i_j)_{j<\omega}$ suites mutuellement indiscernables.
- $\{\varphi^i(x, \bar{b}^i_j) \mid j < \omega\}$ est k^i-inconsistent.
- $p(x) \cup \{\varphi^i(x, \bar{b}^i_0) \mid i < \kappa\}$ est consistent.

Le cas simple

charge$(p) = \sup_{q \supseteq p}$ poids(q)

Théories dp-minimales

Une théorie est dp-minimale si
- elle n'a pas la propriété d'indépendance
- et les types unaires ont charge ≤ 1.