Quando $\aleph_\omega$ è un potente grande cardinale (generico)

Vincenzo Dimonte

09 April 2015

Hausdorff, dopo aver definito il cardinale debolmente inaccessibile, disse

Hausdorff, dopo aver definito il cardinale debolmente inaccessibile, disse:

Quote

Il più piccolo fra di loro ha una grandezza così esorbitante [exorbitanten Grösse] che difficilmente verrà preso in considerazione per gli scopi consueti [üblich] della teoria degli insiemi

Hausdorff, dopo aver definito il cardinale debolmente inaccessibile, disse:

Quote

Il più piccolo fra di loro ha una grandezza così esorbitante [exorbitanten Grösse] che difficilmente verrà preso in considerazione per gli scopi consueti [üblich] della teoria degli insiemi.

Definizione

κ è un cardinale *inaccessibile* se è regolare e strong limit

Hausdorff, dopo aver definito il cardinale debolmente inaccessibile, disse:

Quote

Il più piccolo fra di loro ha una grandezza così esorbitante [exorbitanten Grösse] che difficilmente verrà preso in considerazione per gli scopi consueti [üblich] della teoria degli insiemi.

Definizione

κ è un cardinale *inaccessibile* se è regolare e strong limit.

Osservazione

Se κ è inaccessibile, allora $\aleph_\kappa = \kappa$.

Definizione

κ è un cardinale *Mahlo* se l'insieme di cardinali inaccessibili sotto di esso è stazionario (implica che ci sono κ inaccessibili sotto di esso)

Definizione

κ è un cardinale *Mahlo* se l'insieme di cardinali inaccessibili sotto di esso è stazionario (implica che ci sono κ inaccessibili sotto di esso).

Definizione

κ è un cardinale *misurabile* se esiste $j : V \prec M \subseteq V$ e κ è il punto critico di j

Definizione

κ è un cardinale *Mahlo* se l'insieme di cardinali inaccessibili sotto di esso è stazionario (implica che ci sono κ inaccessibili sotto di esso).

Definizione

κ è un cardinale *misurabile* se esiste $j : V \prec M \subseteq V$ e κ è il punto critico di j.

Ovvero, j è iniettiva, per ogni formula φ e per ogni insieme a, $V \vDash \varphi(a)$ sse $M \vDash \varphi(j(a))$ e κ è il più piccolo ordinale tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale *huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(\kappa)$

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale *huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(\kappa)$.

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale 2-*huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(j(\kappa))$

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale *huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(\kappa)$.

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale 2-*huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(j(\kappa))$.

Definition (Reinhardt, 1970)

κ è un cardinale ω-*huge* o *Reinhardt* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $\lambda = \sup_{n\in\omega} j^n(\kappa)$

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale *huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(\kappa)$.

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale 2-*huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(j(\kappa))$.

Definition (Reinhardt, 1970)

κ è un cardinale ω-*huge* o *Reinhardt* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $\lambda = \sup_{n\in\omega} j^n(\kappa)$. Equivalentemente, $j : V \prec V$

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale *huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(\kappa)$.

Definizione (Kunen, 1972)

κ è un cardinale 2-*huge* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $j(j(\kappa))$.

Definition (Reinhardt, 1970)

κ è un cardinale ω-*huge* o *Reinhardt* se esiste $j : V \prec M$, κ è il punto critico di j e M è chiuso per sequenze lunghe $\lambda = \sup_{n\in\omega} j^n(\kappa)$. Equivalentemente, $j : V \prec V$.

Teorema (Kunen, 1971)

Non esistono cardinali Reinhardt.

Come fare a far diventare tali grandi cardinali “piccoli”?

Come fare a far diventare tali grandi cardinali “piccoli”?

Definition

(Solovay) Sia κ un cardinale, I un ideale su $\mathcal{P}(\kappa)$. Allora $\mathcal{P}(\kappa)/I$ è un forcing

Come fare a far diventare tali grandi cardinali "piccoli"?

Definition

(Solovay) Sia κ un cardinale, I un ideale su $\mathcal{P}(\kappa)$. Allora $\mathcal{P}(\kappa)/I$ è un forcing. Se G è generico per $\mathcal{P}(\kappa)/I$, allora G è un V-ultrafiltro su $\mathcal{P}(\kappa)$ ed esiste $j : V \prec \mathrm{Ult}(V, G)$

Come fare a far diventare tali grandi cardinali “piccoli”?

Definition

(Solovay) Sia κ un cardinale, I un ideale su $\mathcal{P}(\kappa)$. Allora $\mathcal{P}(\kappa)/I$ è un forcing. Se G è generico per $\mathcal{P}(\kappa)/I$, allora G è un V-ultrafiltro su $\mathcal{P}(\kappa)$ ed esiste $j : V \prec \mathrm{Ult}(V, G)$.
(Jech, Prikry) I è precipitevole sse $\mathrm{Ult}(V, G)$ è ben fondato, e in quel caso $j : V \prec M \subseteq V[G]$

Come fare a far diventare tali grandi cardinali "piccoli"?

Definition

(Solovay) Sia κ un cardinale, I un ideale su $\mathcal{P}(\kappa)$. Allora $\mathcal{P}(\kappa)/I$ è un forcing. Se G è generico per $\mathcal{P}(\kappa)/I$, allora G è un V-ultrafiltro su $\mathcal{P}(\kappa)$ ed esiste $j : V \prec \mathrm{Ult}(V, G)$.
(Jech, Prikry) I è precipitevole sse $\mathrm{Ult}(V, G)$ è ben fondato, e in quel caso $j : V \prec M \subseteq V[G]$.
Quindi κ è un cardinale misurabile "generico"

Come fare a far diventare tali grandi cardinali "piccoli"?

Definition

(Solovay) Sia κ un cardinale, I un ideale su $\mathcal{P}(\kappa)$. Allora $\mathcal{P}(\kappa)/I$ è un forcing. Se G è generico per $\mathcal{P}(\kappa)/I$, allora G è un V-ultrafiltro su $\mathcal{P}(\kappa)$ ed esiste $j : V \prec \mathrm{Ult}(V, G)$.
(Jech, Prikry) I è precipitevole sse $\mathrm{Ult}(V, G)$ è ben fondato, e in quel caso $j : V \prec M \subseteq V[G]$.
Quindi κ è un cardinale misurabile "generico".

Allo stesso modo si possono definire huge generico, n-huge generico, supercompatto generico...

Definizione (Chang's Conjecture, 1963)

Ogni modello di tipo $(\aleph_2, \aleph_1)$ (ovvero, l'universo ha cardinalità $\aleph_2$ ed ha un predicato di cardinalità $\aleph_1$) per un linguaggio numerabile ha un sottomodello elementare di tipo $(\aleph_1, \aleph_0)$.

Definizione (Chang's Conjecture, 1963)

Ogni modello di tipo $(\aleph_2, \aleph_1)$ (ovvero, l'universo ha cardinalità $\aleph_2$ ed ha un predicato di cardinalità $\aleph_1$) per un linguaggio numerabile ha un sottomodello elementare di tipo $(\aleph_1, \aleph_0)$.
Notazione: $(\aleph_2, \aleph_1) \twoheadrightarrow (\aleph_1, \aleph_0)$

Definizione (Chang's Conjecture, 1963)

Ogni modello di tipo $(\aleph_2, \aleph_1)$ (ovvero, l'universo ha cardinalità $\aleph_2$ ed ha un predicato di cardinalità $\aleph_1$) per un linguaggio numerabile ha un sottomodello elementare di tipo $(\aleph_1, \aleph_0)$.
Notazione: $(\aleph_2, \aleph_1) \twoheadrightarrow (\aleph_1, \aleph_0)$.

Osservazione

CC implica la non esistenza di un albero di Kurepa

Definizione (Chang's Conjecture, 1963)

Ogni modello di tipo $(\aleph_2, \aleph_1)$ (ovvero, l'universo ha cardinalità $\aleph_2$ ed ha un predicato di cardinalità $\aleph_1$) per un linguaggio numerabile ha un sottomodello elementare di tipo $(\aleph_1, \aleph_0)$.
Notazione: $(\aleph_2, \aleph_1) \twoheadrightarrow (\aleph_1, \aleph_0)$.

Osservazione

CC implica la non esistenza di un albero di Kurepa.

Vi sono estensioni di CC: $(\aleph_3, \aleph_2) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1)$, oppure $(\aleph_3, \aleph_2, \aleph_1) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1, \aleph_0)$.

Teorema (Laver)

Con(huge)$\to$Con($(\aleph_3, \aleph_2) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1)$)

Teorema (Laver)

Con(huge)$\rightarrow$Con($(\aleph_3, \aleph_2) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1)$).

In effetti, il teorema precedente si divide in due:

Teorema (Laver)

Con(huge)$\rightarrow$Con($(\aleph_3, \aleph_2) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1)$).

In effetti, il teorema precedente si divide in due: :

Teorema (Laver)

Con(huge cardinal)$\rightarrow$Con($\aleph_2$ è huge generico e $j(\aleph_2) = \aleph_3$)

Teorema (Laver)

Con(huge)$\rightarrow$Con($(\aleph_3, \aleph_2) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1)$).

In effetti, il teorema precedente si divide in due: :

Teorema (Laver)

Con(huge cardinal)$\rightarrow$Con($\aleph_2$ è huge generico e $j(\aleph_2) = \aleph_3$).

Proposizione

Se $j : V \prec M \subseteq V[G]$, M chiuso sotto $\aleph_3$-sequenze, $\mathrm{crt}(j) = \aleph_2$ e $j(\aleph_2) = \aleph_3$, allora $(\aleph_3, \aleph_2) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1)$

Teorema (Laver)

Con(huge)$\rightarrow$Con($(\aleph_3, \aleph_2) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1)$).

In effetti, il teorema precedente si divide in due: :

Teorema (Laver)

Con(huge cardinal)$\rightarrow$Con($\aleph_2$ è huge generico e $j(\aleph_2) = \aleph_3$).

Proposizione

Se $j : V \prec M \subseteq V[G]$, M chiuso sotto $\aleph_3$-sequenze, $\mathrm{crt}(j) = \aleph_2$ e $j(\aleph_2) = \aleph_3$, allora $(\aleph_3, \aleph_2) \twoheadrightarrow (\aleph_2, \aleph_1)$.

La proposizione si può generalizzare:

Proposizione

Se $j : V \prec M \subseteq V[G]$, M è chiuso sotto $\aleph_{n+1}$-sequenze, $\mathrm{crt}(j) = \aleph_1$ e $j(\aleph_1) = \aleph_2$, $j(\aleph_2) = \aleph_3, \dots,$ allora $(\aleph_{n+1}, \dots, \aleph_2, \aleph_1) \twoheadrightarrow (\aleph_n, \dots, \aleph_1, \aleph_0)$.

Definizione

κ è un cardinale *Jónsson* sse ogni struttura in un linguaggio numerabile con dominio di cardinalità κ ha una sottostruttura elementare propria con dominio della stessa cardinalità

Definizione

κ è un cardinale *Jónsson* sse ogni struttura in un linguaggio numerabile con dominio di cardinalità κ ha una sottostruttura elementare propria con dominio della stessa cardinalità.

Teorema (Silver)

Se $(\ldots, \aleph_2, \aleph_1) \to (\ldots, \aleph_1, \aleph_0)$ allora $\aleph_\omega$ è Jónsson

Definizione

κ è un cardinale *Jónsson* sse ogni struttura in un linguaggio numerabile con dominio di cardinalità κ ha una sottostruttura elementare propria con dominio della stessa cardinalità.

Teorema (Silver)

Se $(\ldots, \aleph_2, \aleph_1) \to (\ldots, \aleph_1, \aleph_0)$ allora $\aleph_\omega$ è Jónsson.

La consistenza di $\aleph_\omega$ Jónsson è un problema rimasto aperto da decenni.

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$. Ciò lascia un po' di spazio aperto:

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$. Ciò lascia un po' di spazio aperto:

Definition

I3 sse esiste λ tale che $\exists j : V_\lambda \prec V_\lambda$;

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$. Ciò lascia un po' di spazio aperto:

Definition

I3 sse esiste λ tale che $\exists j : V_\lambda \prec V_\lambda$;

I2 sse esiste λ tale che $\exists j : V \prec_1 V_{\lambda+1}$;

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$. Ciò lascia un po' di spazio aperto:

Definition

- **I3** sse esiste λ tale che $\exists j : V_\lambda \prec V_\lambda$;
- **I2** sse esiste λ tale che $\exists j : V \prec_1 V_{\lambda+1}$;
- **I1** sse esiste λ tale che $\exists j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$;

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$. Ciò lascia un po' di spazio aperto:

Definition

- I3 sse esiste λ tale che $\exists j : V_\lambda \prec V_\lambda$;
- I2 sse esiste λ tale che $\exists j : V \prec_1 V_{\lambda+1}$;
- I1 sse esiste λ tale che $\exists j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$;
- I0 sse esiste λ tale che
  $\exists j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$, con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$. Ciò lascia un po' di spazio aperto:

Definition

- I3 sse esiste λ tale che $\exists j : V_\lambda \prec V_\lambda$;
- I2 sse esiste λ tale che $\exists j : V \prec_1 V_{\lambda+1}$;
- I1 sse esiste λ tale che $\exists j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$;
- I0 sse esiste λ tale che $\exists j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$, con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Nella giusta situazione, $\aleph_\omega$ I1 o I0 generico implica $\aleph_\omega$ Jónsson

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$. Ciò lascia un po' di spazio aperto:

Definition

- **I3** sse esiste λ tale che $\exists j : V_\lambda \prec V_\lambda$;
- **I2** sse esiste λ tale che $\exists j : V \prec_1 V_{\lambda+1}$;
- **I1** sse esiste λ tale che $\exists j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$;
- **I0** sse esiste λ tale che $\exists j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$, con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Nella giusta situazione, $\aleph_\omega$ I1 o I0 generico implica $\aleph_\omega$ Jónsson. Peccato che non sia chiaro se I0 generico sia consistente

Kunen ha dimostrato $\neg\exists j : V_{\lambda+2} \prec V_{\lambda+2}$. Ciò lascia un po' di spazio aperto:

Definition

- **I3** sse esiste λ tale che $\exists j : V_\lambda \prec V_\lambda$;
- **I2** sse esiste λ tale che $\exists j : V \prec_1 V_{\lambda+1}$;
- **I1** sse esiste λ tale che $\exists j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$;
- **I0** sse esiste λ tale che $\exists j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$, con $\mathrm{crt}(j) < \lambda$.

Nella giusta situazione, $\aleph_\omega$ I1 o I0 generico implica $\aleph_\omega$ Jónsson. Peccato che non sia chiaro se I0 generico sia consistente.

Teorema (Foreman,1982)

Con(2-huge)$\rightarrow$Con($\aleph_1$ è un cardinale 2-huge e ...).

I0 generico ha ulteriori conseguenze:

Definition

$$\Theta = \sup\{\alpha : \exists\pi : \mathcal{P}(\aleph_\omega) \twoheadrightarrow \alpha,\ \pi \in L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))\}$$

I0 generico ha ulteriori conseguenze:

Definition

$\Theta = \sup\{\alpha : \exists \pi : \mathcal{P}(\aleph_\omega) \twoheadrightarrow \alpha,\ \pi \in L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))\}$.

Teorema (GCH)

Supponiamo $\aleph_\omega$ I0 generico

I0 generico ha ulteriori conseguenze:

Definition

$\Theta = \sup\{\alpha : \exists\pi : \mathcal{P}(\aleph_\omega) \twoheadrightarrow \alpha,\ \pi \in L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))\}$.

Teorema (GCH)

Supponiamo $\aleph_\omega$ I0 generico. Allora in $L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))$

I0 generico ha ulteriori conseguenze:

Definition

$\Theta = \sup\{\alpha : \exists\pi : \mathcal{P}(\aleph_\omega) \twoheadrightarrow \alpha,\ \pi \in L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))\}$.

Teorema (GCH)

Supponiamo $\aleph_\omega$ I0 generico. Allora in $L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))$:

1. $\aleph_{\omega+1}$ è misurabile (di più, ω-fortemente misurabile)

I0 generico ha ulteriori conseguenze:

Definition

$\Theta = \sup\{\alpha : \exists\pi : \mathcal{P}(\aleph_\omega) \twoheadrightarrow \alpha,\ \pi \in L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))\}$.

Teorema (GCH)

Supponiamo $\aleph_\omega$ I0 generico. Allora in $L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))$:

1. $\aleph_{\omega+1}$ è misurabile (di più, ω-fortemente misurabile);
2. Θ è debolmente inaccessibile (di più, è "inaccessibile" nel senso di $\neg$AC)

I0 generico ha ulteriori conseguenze:

Definition

$\Theta = \sup\{\alpha : \exists\pi : \mathcal{P}(\aleph_\omega) \twoheadrightarrow \alpha,\ \pi \in L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))\}$.

Teorema (GCH)

Supponiamo $\aleph_\omega$ I0 generico. Allora in $L(\mathcal{P}(\aleph_\omega))$:

1. $\aleph_{\omega+1}$ è misurabile (di più, ω-fortemente misurabile);
2. Θ è debolmente inaccessibile (di più, è "inaccessibile" nel senso di $\neg$AC);
3. Θ è limite di cardinali misurabili.

Shelah e altri hanno sviluppato la teoria pcf per avere risultati in ZFC di combinatorica infinita, con risultati straordinari

Shelah e altri hanno sviluppato la teoria pcf per avere risultati in ZFC di combinatorica infinita, con risultati straordinari.

Teorema (Shelah)

Se $\aleph_\omega$ è strong limit, allora $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$

Shelah e altri hanno sviluppato la teoria pcf per avere risultati in ZFC di combinatorica infinita, con risultati straordinari.

Teorema (Shelah)

Se $\aleph_\omega$ è strong limit, allora $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$.

Quindi in ZFC la grandezza dell'insieme potenza è molto limitata

Shelah e altri hanno sviluppato la teoria pcf per avere risultati in ZFC di combinatorica infinita, con risultati straordinari.

Teorema (Shelah)

Se $\aleph_\omega$ è strong limit, allora $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$.

Quindi in ZFC la grandezza dell'insieme potenza è molto limitata. Ma I0 generico dà un esempio in ZF in cui la grandezza è spropositata

Shelah e altri hanno sviluppato la teoria pcf per avere risultati in ZFC di combinatorica infinita, con risultati straordinari.

Teorema (Shelah)

Se $\aleph_\omega$ è strong limit, allora $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$.

Quindi in ZFC la grandezza dell'insieme potenza è molto limitata. Ma I0 generico dà un esempio in ZF in cui la grandezza è spropositata.

Ci sono dunque due opzioni:

- I0 generico è consistente, dunque la teoria pcf senza AC ha dei seri limiti di applicazione;
- I0 generico è inconsistente; questo potrebbe mettere in dubbio la consistenza di I0 stesso.

Curiosità: sia $D(\aleph_\omega)$ il risultato del teorema. Allora

Teorema

Sotto grandi cardinali, $L(\mathbb{R}) \models \mathrm{AD}$, e vale $D(\omega)$

Curiosità: sia $D(\aleph_\omega)$ il risultato del teorema. Allora

Teorema

Sotto grandi cardinali, $L(\mathbb{R}) \vDash \mathsf{AD}$, e vale $D(\omega)$.

Teorema (Woodin)

$I0(\lambda) \to D(\lambda)$

Curiosità: sia $D(\aleph_\omega)$ il risultato del teorema. Allora

Teorema

Sotto grandi cardinali, $L(\mathbb{R}) \vDash \mathrm{AD}$, e vale $D(\omega)$.

Teorema (Woodin)

$I0(\lambda) \to D(\lambda)$.

Ma

Osservazione

Se λ è regolare, è facile forzare $L(\mathcal{P}(\lambda)) \vDash \neg\mathrm{AC}$, quindi $\neg D(\lambda)$

Curiosità: sia $D(\aleph_\omega)$ il risultato del teorema. Allora

Teorema

Sotto grandi cardinali, $L(\mathbb{R}) \vDash \mathsf{AD}$, e vale $D(\omega)$.

Teorema (Woodin)

$I0(\lambda) \to D(\lambda)$.

Ma

Osservazione

Se λ è regolare, è facile forzare $L(\mathcal{P}(\lambda)) \vDash \neg\mathsf{AC}$, quindi $\neg D(\lambda)$.

Teorema (Shelah, 1996)

Se λ ha cofinalità non numerabile, allora $L(\mathcal{P}(\lambda)) \vDash \mathsf{AC}$, quindi $\neg D(\lambda)$

Curiosità: sia $D(\aleph_\omega)$ il risultato del teorema. Allora

Teorema

Sotto grandi cardinali, $L(\mathbb{R}) \vDash \mathrm{AD}$, e vale $D(\omega)$.

Teorema (Woodin)

$I0(\lambda) \rightarrow D(\lambda)$.

Ma

Osservazione

Se λ è regolare, è facile forzare $L(\mathcal{P}(\lambda)) \vDash \neg\mathrm{AC}$, quindi $\neg D(\lambda)$.

Teorema (Shelah, 1996)

Se λ ha cofinalità non numerabile, allora $L(\mathcal{P}(\lambda)) \vDash \mathrm{AC}$, quindi $\neg D(\lambda)$.

Teorema

Nel core model di Mitchell-Steel, se λ è singolare, allora $L(\mathcal{P}(\lambda)) \vDash \mathrm{AC}$, quindi $\neg D(\lambda)$.

Riassumendo:

Problema

Qual è la consistenza di $\aleph_\omega$ Jónsson?

Riassumendo:

Problema

Qual è la consistenza di $\aleph_\omega$ Jónsson?

Problema

Dobbiamo rinunciare a parte della teoria pcf senza AC oppure (forse) a I0?

Riassumendo:

Problema

Qual è la consistenza di $\aleph_\omega$ Jónsson?

Problema

Dobbiamo rinunciare a parte della teoria pcf senza AC oppure (forse) a I0?

Problema

Quando $L(\mathcal{P}(\lambda)) \vDash \neg\mathrm{AC}$? Quando $L(\mathcal{P}(\lambda)) \vDash D(\lambda)$?

Grazie per l'attenzione.