Immersioni elementari non proprie oltre $L(V_{\lambda+1})$

Vincenzo Dimonte

2 febbraio 2010

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard,

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard, ma sono troppo deboli, totalmente inadeguati a maneggiare l'infinito.

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard, ma sono troppo deboli, totalmente inadeguati a maneggiare l'infinito.
Basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard, ma sono troppo deboli, totalmente inadeguati a maneggiare l'infinito.
Basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.
Nel corso degli anni sono stati proposti diversi assiomi per descrivere l'universo oltre V_ω.

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard, ma sono troppo deboli, totalmente inadeguati a maneggiare l'infinito.

Basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.

Nel corso degli anni sono stati proposti diversi assiomi per descrivere l'universo oltre V_ω.

Alcuni di questi sono riuniti sotto il nome di *Large Cardinal Hypothesis*.

Esempio

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *inaccessibile* se è regolare e chiuso per esponenziazione.

Esempio

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *inaccessibile* se è regolare e chiuso per esponenziazione.

Esempio

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *misurabile* se esiste un ultrafiltro κ-completo su κ.

Esempio

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *inaccessibile* se è regolare e chiuso per esponenziazione.

Esempio

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *misurabile* se esiste un ultrafiltro κ-completo su κ.

Diciamo che $0^\sharp$ esiste sse esiste una classe I di indiscernibili di $(L, \in)$ tale che

- ogni cardinale (in V) è un elemento di I;

Esempio

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *inaccessibile* se è regolare e chiuso per esponenziazione.

Esempio

Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice *misurabile* se esiste un ultrafiltro κ-completo su κ.

Diciamo che $0^\sharp$ esiste sse esiste una classe I di indiscernibili di $(L, \in)$ tale che

- ogni cardinale (in V) è un elemento di I;
- ogni elemento di L è definibile con parametri in I.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{0=1} \arrow[r] & \text{I0} \arrow[dl] \\
 & \text{I1-I3} \arrow[dl] & \\
\text{Principio di Vopěnka} \arrow[dr] & & \\
 & \text{supercompatto} \arrow[r] & \text{Woodin} \arrow[dl] \\
 & \text{misurabile} \arrow[dl] & \\
0^\sharp \text{ esiste} \arrow[dr] & & \\
 & \text{inaccessibile} &
\end{tikzcd}$$

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j, ovvero il più piccolo tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j, ovvero il più piccolo tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j, ovvero il più piccolo tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Corollario

Se $j : V_\eta \prec V_\eta$, allora $\eta < \lambda + 2$, dove λ è l'estremo superiore della sequenza critica di j, definita come $\kappa_0 = \text{crt}(j)$, $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$.

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j, ovvero il più piccolo tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Corollario

Se $j : V_\eta \prec V_\eta$, allora $\eta < \lambda + 2$, dove λ è l'estremo superiore della sequenza critica di j, definita come $\kappa_0 = \mathrm{crt}(j)$, $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$.

Questo porta naturalmente a definire un nuovo tipo di assiomi, chiamati *rank-to-rank*:

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Dopo le prime perplessità, questo nuovo tipo di assiomi (rank-to-rank) ebbe successo:

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.
I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Dopo le prime perplessità, questo nuovo tipo di assiomi (rank-to-rank) ebbe successo:

Teorema (Martin, 1980)

I2 $\rightarrow$ Tutti gli insiemi $\mathbf{\Pi}^1_2$ sono determinati.

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.
I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Dopo le prime perplessità, questo nuovo tipo di assiomi (rank-to-rank) ebbe successo:

Teorema (Martin, 1980)

I2 $\longrightarrow$ Tutti gli insiemi $\mathbf{\Pi}^1_2$ sono determinati.

In breve si scoprì che i risultati trovati erano equiconsistenti con ipotesi molto minori, e tuttora si stanno ricercando risultati di equiconsistenza.

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.
Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.
Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.
Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).
Quindi $L(V_{\lambda+1})$ è molto simile ad $L(\mathbb{R})$.

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.
Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).
Quindi $L(V_{\lambda+1})$ è molto simile ad $L(\mathbb{R})$.
Incredibilmente, $L(V_{\lambda+1})$ sotto I0 è molto simile a $L(\mathbb{R})$ sotto AD.

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	(I0) Coding Lemma

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	(I0) Coding Lemma

I0, dunque, dà un esempio di 'Higher Determinacy Axiom'.

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	(I0) Coding Lemma

I0, dunque, dà un esempio di 'Higher Determinacy Axiom'.
È possibile trovare assiomi più forti, non inconsistenti?

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	(I0) Coding Lemma

I0, dunque, dà un esempio di 'Higher Determinacy Axiom'.
È possibile trovare assiomi più forti, non inconsistenti?
Lo spazio fra I0 e l'inconsistenza è un territorio inesplorato.

A prima vista sembra immediato trovare nuovi assiomi:

A prima vista sembra immediato trovare nuovi assiomi:
$j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è I0,

A prima vista sembra immediato trovare nuovi assiomi:
$j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è I0,
$j : L(V_{\lambda+2}) \prec L(V_{\lambda+2})$ è inconsistente,

A prima vista sembra immediato trovare nuovi assiomi:
$j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è I0,
$j : L(V_{\lambda+2}) \prec L(V_{\lambda+2})$ è inconsistente,
basta supporre l'esistenza di $j : L(N) \prec L(N)$, con $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$.

A prima vista sembra immediato trovare nuovi assiomi:
$j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è I0,
$j : L(V_{\lambda+2}) \prec L(V_{\lambda+2})$ è inconsistente,
basta supporre l'esistenza di $j : L(N) \prec L(N)$, con $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$.
Alcune di queste nuove ipotesi saranno sicuramente inconsistenti.

A prima vista sembra immediato trovare nuovi assiomi:
$j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è I0,
$j : L(V_{\lambda+2}) \prec L(V_{\lambda+2})$ è inconsistente,
basta supporre l'esistenza di $j : L(N) \prec L(N)$, con $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$.
Alcune di queste nuove ipotesi saranno sicuramente inconsistenti.
È auspicabile mantenere le proprietà che caratterizzano gli 'Higher Determinacy Axiom'.

Occorre usare immersioni elementari dotate di una certa proprietà.

Definizione

Occorre usare immersioni elementari dotate di una certa proprietà.

Definizione

Un'immersione elementare $j : L(N) \prec L(N)$ è *propria* se per ogni $X \subseteq V_{\lambda+1}$ la sequenza $\langle X, j(X), j(j(X)), \dots \rangle \in N$.

Occorre usare immersioni elementari dotate di una certa proprietà.

Definizione

Un'immersione elementare $j : L(N) \prec L(N)$ è *propria* se per ogni $X \subseteq V_{\lambda+1}$ la sequenza $\langle X, j(X), j(j(X)), \dots \rangle \in N$.

Teorema

Sia N tale che esiste $Z \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(N) \vDash V = \mathrm{HOD}_{\{Z\} \cup V_{\lambda+1}}$.

Occorre usare immersioni elementari dotate di una certa proprietà.

Definizione

Un'immersione elementare $j : L(N) \prec L(N)$ è *propria* se per ogni $X \subseteq V_{\lambda+1}$ la sequenza $\langle X, j(X), j(j(X)), \dots \rangle \in N$.

Teorema

Sia N tale che esiste $Z \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(N) \vDash V = \mathrm{HOD}_{\{Z\} \cup V_{\lambda+1}}$. Se $j : L(N) \prec L(N)$ è propria, allora in $L(N)$ valgono le proprietà caratteristiche degli 'Higher Determinacy Axioms'.

Woodin ha identificato una sequenza di tali N, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$.

Woodin ha identificato una sequenza di tali N, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

Woodin ha identificato una sequenza di tali N, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;

Woodin ha identificato una sequenza di tali N, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;

Woodin ha identificato una sequenza di tali N, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$, con lo scopo di cercare un equivalente di $AD^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $AD^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;
- $E_0 = L(V_{\lambda+1}) \cap V_{\lambda+2}$;

Woodin ha identificato una sequenza di tali N, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;
- $E_0 = L(V_{\lambda+1}) \cap V_{\lambda+2}$;
- per ogni α esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E_{\alpha+1}) = L(X, V_{\lambda+1})$;

Woodin ha identificato una sequenza di tali N, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;
- $E_0 = L(V_{\lambda+1}) \cap V_{\lambda+2}$;
- per ogni α esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E_{\alpha+1}) = L(X, V_{\lambda+1})$;
- $E_{\alpha+2} = L((X, V_{\lambda+1})^\sharp) \cap V_{\lambda+2}$;

Woodin ha identificato una sequenza di tali N, $V_{\lambda+1} \subset N \subset V_{\lambda+2}$, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;
- $E_0 = L(V_{\lambda+1}) \cap V_{\lambda+2}$;
- per ogni α esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E_{\alpha+1}) = L(X, V_{\lambda+1})$;
- $E_{\alpha+2} = L((X, V_{\lambda+1})^\sharp) \cap V_{\lambda+2}$;
- per ogni $\alpha < \Upsilon$ esiste un'immersione elementare $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Nel caso in cui $L(E_\alpha)\vDash V=\mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j:L(E_\alpha)\prec L(E_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.

Nel caso in cui $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.
Ma la definizione di immersione elementare propria è sensata?
Il concetto di immersione elementare non propria potrebbe essere inconsistente?

Nel caso in cui $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.
Ma la definizione di immersione elementare propria è sensata?
Il concetto di immersione elementare non propria potrebbe essere inconsistente?

Teorema

- ogni $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è propria;

Nel caso in cui $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.
Ma la definizione di immersione elementare propria è sensata?
Il concetto di immersione elementare non propria potrebbe essere inconsistente?

Teorema

- ogni $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è propria;
- se β è successore, allora ogni $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è propria;

Nel caso in cui $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.
Ma la definizione di immersione elementare propria è sensata?
Il concetto di immersione elementare non propria potrebbe essere inconsistente?

Teorema

- ogni $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è propria;
- se β è successore, allora ogni $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è propria;
- se β è limite e ha cofinalità maggiore di ω, allora ogni $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è propria.

Main Theorem I

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E_\alpha)$.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E_\alpha)$.

Esistono β *totalmente non propri*?

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E_\alpha)$.

Esistono β *totalmente non propri*?

Main Theorem II

Sia β tale che $L(E_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e $\mathrm{ot}\{\gamma < \beta : (E_\gamma)^\sharp = (E_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E_\alpha)$.

Esistono β *totalmente non propri*?

Main Theorem II

Sia β tale che $L(E_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e $\mathrm{ot}\{\gamma < \beta : (E_\gamma)^\sharp = (E_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}_\gamma^+\} = \lambda$. Allora ogni immersione elementare $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è non propria.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E_\alpha)$.

Esistono β *totalmente non propri*?

Main Theorem II

Sia β tale che $L(E_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e $\mathrm{ot}\{\gamma < \beta : (E_\gamma)^\sharp = (E_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}_\gamma^+\} = \lambda$. Allora ogni immersione elementare $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è non propria.

Poiché $\mathrm{ot}\{\gamma < \alpha : (E_\gamma)^\sharp = (E_\alpha)^\sharp \cap \mathcal{L}_\gamma^+\} = \alpha$, se α esiste allora esiste anche un tale β.

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β:

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp)\cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$, e sia $k : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β:

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$, e sia $k : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$. Allora esistono 2^λ immersioni elementari non proprie (o proprie) $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ tali he $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$.

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β:

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp)\cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$, e sia $k : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$. Allora esistono 2^λ immersioni elementari non proprie (o proprie) $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ tali he $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$.

Teorema

Sia β tale che $L(E_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e ot$\{\gamma < \beta : (E_\gamma)^\sharp = (E_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}_\gamma^+\} = \lambda$, e siano $j, k : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ tali che $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$.

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β:

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp)\cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$, e sia $k : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$. Allora esistono 2^λ immersioni elementari non proprie (o proprie) $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ tali he $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$.

Teorema

Sia β tale che $L(E_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e ot$\{\gamma < \beta : (E_\gamma)^\sharp = (E_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$, e siano $j, k : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ tali che $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$. Allora $j = k$.

Main Theorem I

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Dobbiamo costruire una classe j non definibile in $L(E_\alpha)$.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Dobbiamo costruire una classe j non definibile in $L(E_\alpha)$.
Complicato.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Dobbiamo costruire una classe j non definibile in $L(E_\alpha)$.
Complicato.
Meglio costruire $j \upharpoonright E_\alpha = k$, ed estenderla.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Dobbiamo costruire una classe j non definibile in $L(E_\alpha)$.
Complicato.
Meglio costruire $j \upharpoonright E_\alpha = k$, ed estenderla.
Quando è possibile estendere tale k?

Lemma

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Dobbiamo costruire una classe j non definibile in $L(E_\alpha)$.
Complicato.
Meglio costruire $j \upharpoonright E_\alpha = k$, ed estenderla.
Quando è possibile estendere tale k?

Lemma

Sia $(E_\alpha)^\sharp_{\beta,n}$ il (β, n)-frammento di $(E_\alpha)^\sharp$, ovvero la sua intersezione con il linguaggio che contiene come costanti solo n indiscernibili ed elementi di E_β. Sia $k : E_\alpha \prec E_\alpha$.

Main Theorem I

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Dobbiamo costruire una classe j non definibile in $L(E_\alpha)$.
Complicato.
Meglio costruire $j \upharpoonright E_\alpha = k$, ed estenderla.
Quando è possibile estendere tale k?

Lemma

Sia $(E_\alpha)^\sharp_{\beta,n}$ il (β, n)-frammento di $(E_\alpha)^\sharp$, ovvero la sua intersezione con il linguaggio che contiene come costanti solo n indiscernibili ed elementi di E_β. Sia $k : E_\alpha \prec E_\alpha$.
Se per ogni $\beta < \alpha$, $n \in \omega$ $k((E_\alpha)^\sharp_{\beta,n}) = (E_\alpha)^\sharp_{\gamma,n}$, allora k è estendibile a $L(E_\alpha)$.

Un'altro punto chiave è il seguente Lemma

Main Theorem I

Un'altro punto chiave è il seguente Lemma

Main Theorem I

Sia α tale che $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$. Allora se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria, i punti fissi di j sono cofinali in Θ^{E_α}.

Un'altro punto chiave è il seguente Lemma

Main Theorem I

Sia α tale che $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$. Allora se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è propria, i punti fissi di j sono cofinali in Θ^{E_α}.

Quindi il nostro obiettivo è trovare un α tale che $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e un $j : E_\alpha \prec E_\alpha$ estendibile i cui punti fissi siano limitati sotto Θ^{E_α}.

Sia $\alpha < \Upsilon$.

Sia $\alpha < \Upsilon$. In $L((E_\alpha)^\sharp)$ definiamo il gioco G_α:

$$\begin{array}{lcccccc} I & \langle k_0, \beta_0 \rangle & & \langle k_1, \beta_1 \rangle & & \langle k_2, \beta_2 \rangle & \\ & & & & & & \dots \\ II & & \eta_0 & & \eta_1 & & \end{array}$$

con le seguenti regole:

Sia $\alpha < \Upsilon$. In $L((E_\alpha)^\sharp)$ definiamo il gioco G_α:

$$\begin{array}{lccccc} I & \langle k_0, \beta_0 \rangle & & \langle k_1, \beta_1 \rangle & & \langle k_2, \beta_2 \rangle & \\ & & & & & & \dots \\ II & & \eta_0 & & \eta_1 & & \end{array}$$

con le seguenti regole:

- $k_0 = \emptyset$;

Sia $\alpha < \Upsilon$. In $L((E_\alpha)^\sharp)$ definiamo il gioco G_α:

$$\begin{array}{lccccccc} I & \langle k_0, \beta_0 \rangle & & \langle k_1, \beta_1 \rangle & & \langle k_2, \beta_2 \rangle & & \\ & & & & & & & \dots \\ II & & \eta_0 & & \eta_1 & & & \end{array}$$

con le seguenti regole:

- $k_0 = \emptyset$;
- $k_{i+1} : E_{\beta_i} \prec E_{\beta_{i+1}}$ è un'immersione elementare estendibile;

Sia $\alpha < \Upsilon$. In $L((E_\alpha)^\sharp)$ definiamo il gioco G_α:

$$\begin{array}{lccccc} I & \langle k_0, \beta_0 \rangle & & \langle k_1, \beta_1 \rangle & & \langle k_2, \beta_2 \rangle \quad \dots \\ II & & \eta_0 & & \eta_1 & \end{array}$$

con le seguenti regole:

- $k_0 = \emptyset$;
- $k_{i+1} : E_{\beta_i} \prec E_{\beta_{i+1}}$ è un'immersione elementare estendibile;
- $\beta_i, \eta_i < \alpha$;

Sia $\alpha < \Upsilon$. In $L((E_\alpha)^\sharp)$ definiamo il gioco G_α:

$$\begin{array}{lccccccc} I & \langle k_0, \beta_0 \rangle & & \langle k_1, \beta_1 \rangle & & \langle k_2, \beta_2 \rangle & & \\ & & & & & & & \dots \\ II & & \eta_0 & & \eta_1 & & & \end{array}$$

con le seguenti regole:

- $k_0 = \emptyset$;
- $k_{i+1} : E_{\beta_i} \prec E_{\beta_{i+1}}$ è un'immersione elementare estendibile;
- $\beta_i, \eta_i < \alpha$;
- $\beta_{i+1} > \eta_i$;

Sia $\alpha < \Upsilon$. In $L((E_\alpha)^\sharp)$ definiamo il gioco G_α:

$$\begin{array}{lccccccc} I & \langle k_0, \beta_0 \rangle & & \langle k_1, \beta_1 \rangle & & \langle k_2, \beta_2 \rangle & & \\ & & & & & & & \dots \\ II & & \eta_0 & & \eta_1 & & & \end{array}$$

con le seguenti regole:

- $k_0 = \emptyset$;
- $k_{i+1} : E_{\beta_i} \prec E_{\beta_{i+1}}$ è un'immersione elementare estendibile;
- $\beta_i, \eta_i < \alpha$;
- $\beta_{i+1} > \eta_i$;
- $k_i \subseteq k_{i+1}$;

Sia $\alpha < \Upsilon$. In $L((E_\alpha)^\sharp)$ definiamo il gioco G_α:

$$\begin{array}{lccccccc} I & \langle k_0, \beta_0 \rangle & & \langle k_1, \beta_1 \rangle & & \langle k_2, \beta_2 \rangle & & \\ & & & & & & & \dots \\ II & & \eta_0 & & \eta_1 & & & \end{array}$$

con le seguenti regole:

- $k_0 = \emptyset$;
- $k_{i+1} : E_{\beta_i} \prec E_{\beta_{i+1}}$ è un'immersione elementare estendibile;
- $\beta_i, \eta_i < \alpha$;
- $\beta_{i+1} > \eta_i$;
- $k_i \subseteq k_{i+1}$;
- II vince sse I non può più giocare.

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,
- $\alpha = \Theta^{E_\alpha}$,

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,
- $\alpha = \Theta^{E_\alpha}$,
- $(\mathrm{cof}(\alpha) = \omega)^{L((E_\alpha)^\sharp)}$,

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,
- $\alpha = \Theta^{E_\alpha}$,
- $(\mathrm{cof}(\alpha) = \omega)^{L((E_\alpha)^\sharp)}$,
- $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$,

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,
- $\alpha = \Theta^{E_\alpha}$,
- $(\mathrm{cof}(\alpha) = \omega)^{L((E_\alpha)^\sharp)}$,
- $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$,

la risultante immersione elementare è estendibile ad un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,
- $\alpha = \Theta^{E_\alpha}$,
- $(\mathrm{cof}(\alpha) = \omega)^{L((E_\alpha)^\sharp)}$,
- $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$,

la risultante immersione elementare è estendibile ad un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.
Come ci assicuriamo che I vinca?

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,
- $\alpha = \Theta^{E_\alpha}$,
- $(\mathrm{cof}(\alpha) = \omega)^{L((E_\alpha)^\sharp)}$,
- $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$,

la risultante immersione elementare è estendibile ad un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Come ci assicuriamo che I vinca?

Fissato β_i, ci sono al più $\Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$ immersioni elementari tali che $\langle k_i, \beta_i \rangle$ sia una mossa valida.

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,
- $\alpha = \Theta^{E_\alpha}$,
- $(\mathrm{cof}(\alpha) = \omega)^{L((E_\alpha)^\sharp)}$,
- $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$,

la risultante immersione elementare è estendibile ad un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.
Come ci assicuriamo che I vinca?
Fissato β_i, ci sono al più $\Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$ immersioni elementari tali che $\langle k_i, \beta_i \rangle$ sia una mossa valida.
Se II avesse una strategia vincente definibile τ, e $\alpha = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$, sarebbe possibile definire un club di punti chiusi sotto τ.

Quindi, nel caso in cui

- I vinca il gioco G_α,
- $\alpha = \Theta^{E_\alpha}$,
- $(\mathrm{cof}(\alpha) = \omega)^{L((E_\alpha)^\sharp)}$,
- $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$,

la risultante immersione elementare è estendibile ad un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.
Come ci assicuriamo che I vinca?
Fissato β_i, ci sono al più $\Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$ immersioni elementari tali che $\langle k_i, \beta_i \rangle$ sia una mossa valida.
Se II avesse una strategia vincente definibile τ, e $\alpha = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$, sarebbe possibile definire un club di punti chiusi sotto τ.
Giocando la restrizione di $j : L(E_{\alpha+2}) \prec L(E_{\alpha+2})$, si arriverebbe ad un assurdo.

$$\Theta^{E_\alpha} = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}:$$

$\Theta^{E_\alpha} = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$: tutti i prewellorderings di $V_{\lambda+1}$ in $L(E_\alpha)$ sono in $L((E_\alpha)^\sharp)$.

$\Theta^{E_\alpha} = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$: tutti i prewellorderings di $V_{\lambda+1}$ in $L(E_\alpha)$ sono in $L((E_\alpha)^\sharp)$. Quindi è implicato da $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$.

$\Theta^{E_\alpha} = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$: tutti i prewellorderings di $V_{\lambda+1}$ in $L(E_\alpha)$ sono in $L((E_\alpha)^\sharp)$. Quindi è implicato da $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$.
Il più piccolo di questi α è tale che $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, perciò tutto torna

$\Theta^{E_\alpha} = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$: tutti i prewellorderings di $V_{\lambda+1}$ in $L(E_\alpha)$ sono in $L((E_\alpha)^\sharp)$. Quindi è implicato da $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$.
Il più piccolo di questi α è tale che $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, perciò tutto torna.

Main Theorem II

Sia β tale che $L(E_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e ot$\{\gamma < \beta : (E_\gamma)^\sharp = (E_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$.

$\Theta^{E_\alpha}=\Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$: tutti i prewellorderings di $V_{\lambda+1}$ in $L(E_\alpha)$ sono in $L((E_\alpha)^\sharp)$. Quindi è implicato da $L((E_\alpha)^\sharp)\cap V_{\lambda+2}=E_\alpha$.
Il più piccolo di questi α è tale che $L(E_\alpha)\vDash V=\mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, perciò tutto torna.

Main Theorem II

Sia β tale che $L(E_\beta)\vDash V=\mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e $\mathrm{ot}\{\gamma<\beta:(E_\gamma)^\sharp=(E_\beta)^\sharp\cap\mathcal{L}_\gamma^+\}=\lambda$. Allora ogni immersione elementare $j:L(E_\beta)\prec L(E_\beta)$ è non propria.

$\Theta^{E_\alpha} = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$: tutti i prewellorderings di $V_{\lambda+1}$ in $L(E_\alpha)$ sono in $L((E_\alpha)^\sharp)$. Quindi è implicato da $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$.
Il più piccolo di questi α è tale che $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, perciò tutto torna.

Main Theorem II

Sia β tale che $L(E_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e $\mathrm{ot}\{\gamma < \beta : (E_\gamma)^\sharp = (E_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$. Allora ogni immersione elementare $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è non propria.

Questo risultato è conseguenza di un'analisi sulle proprietà di riflessione degli sharp.

$\Theta^{E_\alpha} = \Theta^{(E_\alpha)^\sharp}$: tutti i prewellorderings di $V_{\lambda+1}$ in $L(E_\alpha)$ sono in $L((E_\alpha)^\sharp)$. Quindi è implicato da $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$.
Il più piccolo di questi α è tale che $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, perciò tutto torna.

Main Theorem II

Sia β tale che $L(E_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e ot$\{\gamma < \beta : (E_\gamma)^\sharp = (E_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$. Allora ogni immersione elementare $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è non propria.

Questo risultato è conseguenza di un'analisi sulle proprietà di riflessione degli sharp.
Ogni $L(E_\alpha)$ contiene $I_\alpha = \{\gamma < \alpha \colon (E_\alpha)^\sharp_\gamma = (E_\gamma)^\sharp\}$.

Nel caso in cui $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ allora $j \upharpoonright E_\alpha$ conserva i frammenti degli sharp.

Nel caso in cui $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ allora $j \restriction E_\alpha$ conserva i frammenti degli sharp.
Quindi conserva i segmenti iniziali di I_α.

Nel caso in cui $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ allora $j \upharpoonright E_\alpha$ conserva i frammenti degli sharp.
Quindi conserva i segmenti iniziali di I_α.
Se $I_\alpha \neq \emptyset$, allora $\Theta^{E_\alpha} = \sup_{\beta<\alpha} \Theta^{E_\beta}$.

Nel caso in cui $L(E_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ allora $j \upharpoonright E_\alpha$ conserva i frammenti degli sharp.
Quindi conserva i segmenti iniziali di I_α.
Se $I_\alpha \neq \emptyset$, allora $\Theta^{E_\alpha} = \sup_{\beta<\alpha} \Theta^{E_\beta}$.
Se $\mathrm{ot}(I_\alpha) = \lambda$, allora $\sup I_\alpha = \alpha$ e $\langle \Theta^{E_\gamma} : \gamma \in I_\alpha \rangle$ testimonia che j non è proprio.

Due parole sugli altri Teoremi presentati.

Due parole sugli altri Teoremi presentati.
Con uno studio combinatorico del gioco G_α, è possibile dimostrare che esistono almeno α immersioni elementari non-proprie che hanno in comune $j \upharpoonright V_\lambda$.

Due parole sugli altri Teoremi presentati.
Con uno studio combinatorico del gioco G_α, è possibile dimostrare che esistono almeno α immersioni elementari non-proprie che hanno in comune $j \upharpoonright V_\lambda$.
Si dimostra che se $I_\alpha \neq \emptyset$, allora E_α è definibile con parametri in $V_{\lambda+1}$ e I_α. Se $\mathrm{ot}(I_\alpha) = \lambda$, allora ogni $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$ è definibile da $j \upharpoonright V_\lambda$.