Immersioni elementari non proprie oltre $L(V_{\lambda+1})$

Vincenzo Dimonte

26 gennaio 2010

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard,

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard, ma sono troppo deboli, totalmente inadeguati a maneggiare l'infinito.

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard, ma sono troppo deboli, totalmente inadeguati a maneggiare l'infinito.
Basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard, ma sono troppo deboli, totalmente inadeguati a maneggiare l'infinito.
Basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.
Nel corso degli anni sono stati proposti diversi assiomi per descrivere l'universo oltre V_ω.

ZFC e ZF sono ormai considerati i sistemi assiomatici standard, ma sono troppo deboli, totalmente inadeguati a maneggiare l'infinito.
Basti pensare a CH, o all'esponenziazione cardinale in generale.
Nel corso degli anni sono stati proposti diversi assiomi per descrivere l'universo oltre V_ω.
Alcuni di questi sono riuniti sotto il nome di *Large Cardinal Hypothesis*.

Teorema

L'esistenza di un cardinale inaccessibile è equiconsistente con la misurabilità degli insiemi proiettivi in $\mathbb{R}$.

Teorema

L'esistenza di un cardinale inaccessibile è equiconsistente con la misurabilità degli insiemi proiettivi in $\mathbb{R}$.

Teorema (Solovay)

L'esistenza di un cardinale misurabile è equiconsistente con 'Ogni misura Boreliana su $\mathcal{B}([0,1])$ può essere estesa ad una misura su $\mathcal{P}([0,1])$'.

Teorema

L'esistenza di un cardinale inaccessibile è equiconsistente con la misurabilità degli insiemi proiettivi in $\mathbb{R}$.

Teorema (Solovay)

L'esistenza di un cardinale misurabile è equiconsistente con 'Ogni misura Boreliana su $\mathcal{B}([0,1])$ può essere estesa ad una misura su $\mathcal{P}([0,1])$'.

Teorema

Esiste un cardinale misurabile se e soltanto se esiste un cardinale κ ed esiste un omomorfismo non banale $h : \mathbb{Z}^\kappa/\mathbb{Z}^{<\kappa} \to \mathbb{Z}$.

Teorema

L'esistenza di un cardinale inaccessibile è equiconsistente con la misurabilità degli insiemi proiettivi in $\mathbb{R}$.

Teorema (Solovay)

L'esistenza di un cardinale misurabile è equiconsistente con 'Ogni misura Boreliana su $\mathcal{B}([0,1])$ può essere estesa ad una misura su $\mathcal{P}([0,1])$'.

Teorema

Esiste un cardinale misurabile se e soltanto se esiste un cardinale κ ed esiste un omomorfismo non banale $h:\mathbb{Z}^\kappa/\mathbb{Z}^{<\kappa}\to\mathbb{Z}$.

Teorema (Martin-Steel)

'Tutti i giochi infiniti su $\{0,1\}$ sono determinati' è equiconsistente con l'esistenza di ω cardinali di Woodin.

$$\text{0=1} \to \text{I0} \to \text{I1-I3} \to \text{Principio di Vopěnka} \to \text{supercompatto} \to \text{Woodin} \to \text{misurabile} \to 0^\sharp \text{ esiste} \to \text{inaccessibile}$$

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j, ovvero il più piccolo tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j, ovvero il più piccolo tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j, ovvero il più piccolo tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Corollario

Se $j : V_\eta \prec V_\eta$, allora $\eta < \lambda + 2$, dove λ è l'estremo superiore della sequenza critica di j, definita come $\kappa_0 = \mathrm{crt}(j)$, $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$.

Cardinale di Reinhardt

κ è un cardinale di Reinhardt se esiste $j : V \prec V$ tale che κ è il punto critico di j, ovvero il più piccolo tale che $j(\kappa) > \kappa$.

Teorema (Kunen, 1971)

Se $j : V \prec M$, allora $M \neq V$.

Corollario

Se $j : V_\eta \prec V_\eta$, allora $\eta < \lambda + 2$, dove λ è l'estremo superiore della sequenza critica di j, definita come $\kappa_0 = \text{crt}(j)$, $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$.

Questo porta naturalmente a definire un nuovo tipo di assiomi, chiamati *rank-to-rank*:

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.

I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Dopo le prime perplessità, questo nuovo tipo di assiomi (rank-to-rank) ebbe successo:

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.
I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Dopo le prime perplessità, questo nuovo tipo di assiomi (rank-to-rank) ebbe successo:

Teorema (Martin, 1980)

I2 $\longrightarrow$ Tutti gli insiemi $\mathbf{\Pi}^1_2$ sono determinati.

Rank-to-rank Axioms

I3: Esiste un'immersione elementare $j : V_\lambda \prec V_\lambda$.
I1: Esiste un'immersione elementare $j : V_{\lambda+1} \prec V_{\lambda+1}$.

Dopo le prime perplessità, questo nuovo tipo di assiomi (rank-to-rank) ebbe successo:

Teorema (Martin, 1980)

I2 $\longrightarrow$ Tutti gli insiemi $\mathbf{\Pi}^1_2$ sono determinati.

In breve si scoprì che i risultati trovati erano equiconsistenti con ipotesi molto minori, e tuttora si stanno ricercando risultati di equiconsistenza.

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.
Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.
Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.
Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).
Quindi $L(V_{\lambda+1})$ è molto simile ad $L(\mathbb{R})$.

Definizione

I0: Esiste un'immersione elementare $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ con punto critico minore di λ.

Anche questa ipotesi fu usata per dimostrare risultati di determinatezza, ma ha dato risultati molto interessanti sulla struttura di $L(V_{\lambda+1})$.
Poiché la cofinalità di λ è ω, $V_{\lambda+1}$ è molto simile a $V_{\omega+1}$, ovvero $\mathbb{R}$ (è possibile definirvi una teoria descrittiva, comprese caratterizzazioni con alberi).
Quindi $L(V_{\lambda+1})$ è molto simile ad $L(\mathbb{R})$.
Incredibilmente, $L(V_{\lambda+1})$ sotto I0 è molto simile a $L(\mathbb{R})$ sotto AD.

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	(I0) Coding Lemma

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	(I0) Coding Lemma

I0, dunque, dà un esempio di 'Higher Determinacy Axiom'.

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	(I0) Coding Lemma

I0, dunque, dà un esempio di 'Higher Determinacy Axiom'.
È possibile trovare assiomi più forti, non inconsistenti?

Ecco degli esempi:

$L(\mathbb{R})$	$L(V_{\lambda+1})$
DC	DC_λ
Θ è regolare	$\Theta^{L(V_{\lambda+1})}$ è regolare
(AD) ω_1 è misurabile	(I0) λ^+ è misurabile
(AD)Coding Lemma	(I0) Coding Lemma

I0, dunque, dà un esempio di 'Higher Determinacy Axiom'.
È possibile trovare assiomi più forti, non inconsistenti?
Lo spazio fra I0 e l'inconsistenza è un territorio inesplorato.

Il criterio di riferimento per la definizione di nuovi assiomi è la ricerca di 'Higher Determinacy Axioms'.

Il criterio di riferimento per la definizione di nuovi assiomi è la ricerca di ‘Higher Determinacy Axioms’.
Per esempio, si potrebbe trovare un assioma equivalente alla determinatezza in $L(A, \mathbb{R})$, con $A \subseteq \mathbb{R}$.

Il criterio di riferimento per la definizione di nuovi assiomi è la ricerca di 'Higher Determinacy Axioms'.

Per esempio, si potrebbe trovare un assioma equivalente alla determinatezza in $L(A, \mathbb{R})$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Non è immediato dimostrare che, dato $X \subseteq V_{\lambda+1}$, l'esistenza di un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ dà risultati simili a $L(\mathbb{R}, A)$ sotto AD, con $A \subseteq \mathbb{R}$.

Il criterio di riferimento per la definizione di nuovi assiomi è la ricerca di 'Higher Determinacy Axioms'.
Per esempio, si potrebbe trovare un assioma equivalente alla determinatezza in $L(A, \mathbb{R})$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Non è immediato dimostrare che, dato $X \subseteq V_{\lambda+1}$, l'esistenza di un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$ dà risultati simili a $L(\mathbb{R}, A)$ sotto AD, con $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione

Un'immersione elementare $j : L(X, V_{\lambda+1}) \prec L(X, V_{\lambda+1})$, con $X \subseteq V_{\lambda+1}$ è *propria* se i suoi punti fissi sono cofinali in $\Theta^{L(X,V_{\lambda+1})}$.

Il criterio di riferimento per la definizione di nuovi assiomi è la ricerca di 'Higher Determinacy Axioms'.
Per esempio, si potrebbe trovare un assioma equivalente alla determinatezza in $L(A,\mathbb{R})$, con $A\subseteq\mathbb{R}$. Non è immediato dimostrare che, dato $X\subseteq V_{\lambda+1}$, l'esistenza di un'immersione elementare $j:L(X,V_{\lambda+1})\prec L(X,V_{\lambda+1})$ dà risultati simili a $L(\mathbb{R},A)$ sotto AD, con $A\subseteq\mathbb{R}$.

Definizione

Un'immersione elementare $j:L(X,V_{\lambda+1})\prec L(X,V_{\lambda+1})$, con $X\subseteq V_{\lambda+1}$ è *propria* se i suoi punti fissi sono cofinali in $\Theta^{L(X,V_{\lambda+1})}$.

Se $j:L(X,V_{\lambda+1})\prec L(X,V_{\lambda+1})$ è propria, allora valgono le proprietà della determinatezza.

Woodin ha creato una sequenza di nuovi assiomi, con lo scopo di cercare un equivalente di $AD^{\mathbb{R}}$.

Woodin ha creato una sequenza di nuovi assiomi, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

Woodin ha creato una sequenza di nuovi assiomi, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;

Woodin ha creato una sequenza di nuovi assiomi, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;

Woodin ha creato una sequenza di nuovi assiomi, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;
- $E_0 = L(V_{\lambda+1}) \cap V_{\lambda+2}$;

Woodin ha creato una sequenza di nuovi assiomi, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;
- $E_0 = L(V_{\lambda+1}) \cap V_{\lambda+2}$;
- per ogni α esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E_{\alpha+1}) = L(X, V_{\lambda+1})$;

Woodin ha creato una sequenza di nuovi assiomi, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;
- $E_0 = L(V_{\lambda+1}) \cap V_{\lambda+2}$;
- per ogni α esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E_{\alpha+1}) = L(X, V_{\lambda+1})$;
- $E_{\alpha+2} = L((X, V_{\lambda+1})^\sharp) \cap V_{\lambda+2}$;

Woodin ha creato una sequenza di nuovi assiomi, con lo scopo di cercare un equivalente di $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$. La chiave di questa ricerca è una sequenza di sottoinsiemi di $V_{\lambda+2}$ che mimi la costruzione del *minimum model* per $\mathrm{AD}^{\mathbb{R}}$:

- $V_{\lambda+1} \subset E_\alpha \subset V_{\lambda+2}$;
- se $\beta < \alpha$ allora $E_\beta \subset E_\alpha$;
- $E_0 = L(V_{\lambda+1}) \cap V_{\lambda+2}$;
- per ogni α esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E_{\alpha+1}) = L(X, V_{\lambda+1})$;
- $E_{\alpha+2} = L((X, V_{\lambda+1})^\sharp) \cap V_{\lambda+2}$;
- per ogni $\alpha < \Upsilon$ esiste un'immersione elementare $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Nel caso in cui $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.

Nel caso in cui $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.

Ma la definizione di immersione elementare propria è sensata?

Il concetto di immersione elementare non propria potrebbe essere inconsistente?

Nel caso in cui $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.
Ma la definizione di immersione elementare propria è sensata?
Il concetto di immersione elementare non propria potrebbe essere inconsistente?

Teorema

- ogni $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è propria;

Nel caso in cui $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.
Ma la definizione di immersione elementare propria è sensata?
Il concetto di immersione elementare non propria potrebbe essere inconsistente?

Teorema

- ogni $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è propria;
- se β è successore, allora ogni $j : L(E^0_\beta) \prec L(E^0_\beta)$ è propria;

Nel caso in cui $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, se $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$ è propria, allora ne seguono le proprietà di determinatezza.
Ma la definizione di immersione elementare propria è sensata?
Il concetto di immersione elementare non propria potrebbe essere inconsistente?

Teorema

- ogni $j : L(V_{\lambda+1}) \prec L(V_{\lambda+1})$ è propria;
- se β è successore, allora ogni $j : L(E^0_\beta) \prec L(E^0_\beta)$ è propria;
- se β è limite e ha cofinalità maggiore di ω, allora ogni $j : L(E^0_\beta) \prec L(E^0_\beta)$ è propria.

Per trovare risposta a questa domanda occorre un'analisi approfondita di un particolare tipo di ordinali,

Per trovare risposta a questa domanda occorre un'analisi approfondita di un particolare tipo di ordinali,
ovvero gli α tali che $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$

Per trovare risposta a questa domanda occorre un'analisi approfondita di un particolare tipo di ordinali, ovvero gli α tali che $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, ma non esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E^0_\alpha) = L(X, V_{\lambda+1})$.

Per trovare risposta a questa domanda occorre un'analisi approfondita di un particolare tipo di ordinali, ovvero gli α tali che $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, ma non esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E^0_\alpha) = L(X, V_{\lambda+1})$.
Tali $L(E^0_\alpha)$, infatti, hanno molte proprietà in comune con $L(V_{\lambda+1})$, ma hanno una struttura 'logica' più complessa, permettendo l'esistenza di molte immersioni elementari al proprio interno.

Teorema

Per trovare risposta a questa domanda occorre un'analisi approfondita di un particolare tipo di ordinali,
ovvero gli α tali che $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, ma non esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E^0_\alpha) = L(X, V_{\lambda+1})$.
Tali $L(E^0_\alpha)$, infatti, hanno molte proprietà in comune con $L(V_{\lambda+1})$, ma hanno una struttura 'logica' più complessa, permettendo l'esistenza di molte immersioni elementari al proprio interno.

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$.

Per trovare risposta a questa domanda occorre un'analisi approfondita di un particolare tipo di ordinali, ovvero gli α tali che $L(E^0_\alpha) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$, ma non esiste $X \subseteq V_{\lambda+1}$ tale che $L(E^0_\alpha) = L(X, V_{\lambda+1})$.
Tali $L(E^0_\alpha)$, infatti, hanno molte proprietà in comune con $L(V_{\lambda+1})$, ma hanno una struttura 'logica' più complessa, permettendo l'esistenza di molte immersioni elementari al proprio interno.

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$. Allora esiste un'immersione elementare non propria $j : L(E_\alpha) \prec L(E_\alpha)$.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E^0_\alpha)$.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E^0_\alpha)$.
Esistono β *totalmente non propri*?

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E^0_\alpha)$.

Esistono β *totalmente non propri*?

Teorema

Sia β tale che $L(E^0_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e $\mathrm{ot}\{\gamma < \beta : (E^0_\gamma)^\sharp = (E^0_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E^0_\alpha)$.
Esistono β *totalmente non propri*?

Teorema

Sia β tale che $L(E^0_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e ot$\{\gamma < \beta : (E^0_\gamma)^\sharp = (E^0_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$. Allora ogni immersione elementare $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è non propria.

Però α è *parzialmente non proprio*, ovvero esistono anche immersioni elementari proprie $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$, quindi la struttura di Higher Determinacy è mantenuta in $L(E^0_\alpha)$.
Esistono β *totalmente non propri*?

Teorema

Sia β tale che $L(E^0_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e $\mathrm{ot}\{\gamma < \beta : (E^0_\gamma)^\sharp = (E^0_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$. Allora ogni immersione elementare $j : L(E_\beta) \prec L(E_\beta)$ è non propria.

Poiché $\mathrm{ot}\{\gamma < \alpha : (E^0_\gamma)^\sharp = (E^0_\alpha)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \alpha$, se α esiste allora esiste anche un tale β.

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β:

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$, e sia $k : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$.

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β:

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$, e sia $k : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$. Allora esistono 2^λ immersioni elementari non proprie (o proprie) $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$ tali he $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$.

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β:

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$, e sia $k : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$. Allora esistono 2^λ immersioni elementari non proprie (o proprie) $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$ tali he $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$.

Teorema

Sia β tale che $L(E^0_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e ot$\{\gamma < \beta : (E^0_\gamma)^\sharp = (E^0_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$, e siano $j, k : L(E^0_\beta) \prec L(E^0_\beta)$ tali che $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$.

Altri risultati portano a delineare la diversa natura di α e β:

Teorema

Sia α il minimo tale che $L((E_\alpha)^\sharp) \cap V_{\lambda+2} = E_\alpha$, e sia $k : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$. Allora esistono 2^λ immersioni elementari non proprie (o proprie) $j : L(E^0_\alpha) \prec L(E^0_\alpha)$ tali he $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$.

Teorema

Sia β tale che $L(E^0_\beta) \vDash V = \mathrm{HOD}_{V_{\lambda+1}}$ e ot$\{\gamma < \beta : (E^0_\gamma)^\sharp = (E^0_\beta)^\sharp \cap \mathcal{L}^+_\gamma\} = \lambda$, e siano $j, k : L(E^0_\beta) \prec L(E^0_\beta)$ tali che $j \upharpoonright V_{\lambda+1} = k \upharpoonright V_{\lambda+1}$. Allora $j = k$.