Generalized Baire Spaces

Giorgio Laguzzi

Universität Freiburg

Welcome Home - Torino 2014

Retta reale, Spazio di Cantor e di Baire

- **Retta reale** $\mathbb{R}$, con la topologia standard e la misura di Lebesgue.

Retta reale, Spazio di Cantor e di Baire

- **Retta reale** $\mathbb{R}$, con la topologia standard e la misura di Lebesgue.
- **Spazio di Cantor** $2^\omega := \{f : f : \omega \to 2 \text{ funzione}\}$,

  Topologia: generata dagli aperti di base $[s] := \{x \in 2^\omega : x \supset s\}$, con $s \in 2^{<\omega}$;
  Misura: generata da $\mu([s]) = 2^{-|s|}$.

Retta reale, Spazio di Cantor e di Baire

- **Retta reale** $\mathbb{R}$, con la topologia standard e la misura di Lebesgue.
- **Spazio di Cantor** $2^\omega := \{f : f : \omega \to 2 \text{ funzione}\}$,

  Topologia: generata dagli aperti di base $[s] := \{x \in 2^\omega : x \supset s\}$, con $s \in 2^{<\omega}$;
  Misura: generata da $\mu([s]) = 2^{-|s|}$.
- **Spazio di Baire** $\omega^\omega := \{f : f : \omega \to \omega \text{ funzione}\}$,

  Topologia: generata dagli aperti di base $[s] := \{x \in \omega^\omega : x \supset s\}$, con $s \in \omega^{<\omega}$;
  Misura: generata da $\mu([s]) = \prod_{n<|s|} 2^{-s(n)+1}$.

Gli spazi di Baire e di Cantor sono utili in teoria degli insiemi, poiché:

Gli spazi di Baire e di Cantor sono utili in teoria degli insiemi, poiché:

* permettono di studiare problemi topologici e di teoria della misura sui numeri reali utilizzando la **combinatorica delle successioni infinite e degli alberi sui numeri naturali**;

Gli spazi di Baire e di Cantor sono utili in teoria degli insiemi, poiché:

* permettono di studiare problemi topologici e di teoria della misura sui numeri reali utilizzando la **combinatorica delle successioni infinite e degli alberi sui numeri naturali**;

** costituiscono un ponte essenziale tra la **teoria dei modelli e la teoria (descrittiva) degli insiemi**, in quanto un modello *numerabile* può essere codificato come un elemento di questi spazi, e la relazione di *isomorfismo* può essere codificata come una relazione binaria su 2^ω e ω^ω.

Domande naturali

Domande naturali

1. AC è necessario per costruire insiemi non Lebesgue misurabili?

Domande naturali

1. AC è necessario per costruire insiemi non Lebesgue misurabili?
2. Gli analitici ($\mathbf{\Sigma}^1_1$, proiezioni di Boreliani) sono Lebesgue misurabili?

Domande naturali

1. AC è necessario per costruire insiemi non Lebesgue misurabili?
2. Gli analitici ($\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, proiezioni di Boreliani) sono Lebesgue misurabili?
3. Quale è la taglia del più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di misura non-nulla?

Domande naturali

1. AC è necessario per costruire insiemi non Lebesgue misurabili?
2. Gli analitici ($\mathbf{\Sigma}^1_1$, proiezioni di Boreliani) sono Lebesgue misurabili?
3. Quale è la taglia del più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di misura non-nulla?
4. Quale è la complessità della relazione di isomorfismo? in altre parole, quale è la complessità dell'insieme $\{x : A_x \cong A_y\}$, per un certo y fissato?

Risposte

1. (*AC è necessario per costruire insiemi non Lebesgue misurabili?*) Sì. Se si indebolisce l'assioma di scelta, è possibile costruire un modello dove tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono Lebesgue misurabili e hanno la proprietà di Baire (Solovay, 1970).

Risposte

1. (*AC è necessario per costruire insiemi non Lebesgue misurabili?*) Sì. Se si indebolisce l'assioma di scelta, è possibile costruire un modello dove tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono Lebesgue misurabili e hanno la proprietà di Baire (Solovay, 1970).
2. (*Gli analitici ($\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, proiezioni di Boreliani) sono Lebesgue misurabili?*) Sì (Luzin, 1917).

Risposte

1. (*AC è necessario per costruire insiemi non Lebesgue misurabili?*) Sì. Se si indebolisce l'assioma di scelta, è possibile costruire un modello dove tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono Lebesgue misurabili e hanno la proprietà di Baire (Solovay, 1970).
2. (*Gli analitici ($\mathbf{\Sigma}^1_1$, proiezioni di Boreliani) sono Lebesgue misurabili?*) Sì (Luzin, 1917).
3. (*Quale è la taglia del più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di misura non-nulla?*) Il metodo del forcing mostra che tale risposta è indipendente da ZFC. Indicando con $\text{non}(\mathcal{N})$ tale cardinalità, e con $\mathfrak{c}$ la cardinalità di $\mathbb{R}$, è possibile ottenere $N_0 \models \text{non}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \aleph_2$ e $N_1 \models \text{non}(\mathcal{N}) = \aleph_1 \wedge \mathfrak{c} = \aleph_2$.

Risposte

1. (*AC è necessario per costruire insiemi non Lebesgue misurabili?*) Sì. Se si indebolisce l'assioma di scelta, è possibile costruire un modello dove tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono Lebesgue misurabili e hanno la proprietà di Baire (Solovay, 1970).
2. (*Gli analitici ($\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, proiezioni di Boreliani) sono Lebesgue misurabili?*) Sì (Luzin, 1917).
3. (*Quale è la taglia del più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di misura non-nulla?*) Il metodo del forcing mostra che tale risposta è indipendente da ZFC. Indicando con $\text{non}(\mathcal{N})$ tale cardinalità, e con $\mathfrak{c}$ la cardinalità di $\mathbb{R}$, è possibile ottenere $N_0 \models \text{non}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} = \aleph_2$ e $N_1 \models \text{non}(\mathcal{N}) = \aleph_1 \wedge \mathfrak{c} = \aleph_2$.
4. (*Quale è la complessità della relazione di isomorfismo?*) Complessità Boreliana (Scott).

Da 2^ω a 2^κ

La quarta domanda riguarda la connessione esistente tra la teoria descrittiva degli insiemi e la teoria dei modelli. Particolarmente interessante risulta essere la connessione della **Borel riducibilità tra relazioni di isomorfismo tra diverse teorie e la teoria della stabilità**.

Da 2^ω a 2^κ

La quarta domanda riguarda la connessione esistente tra la teoria descrittiva degli insiemi e la teoria dei modelli. Particolarmente interessante risulta essere la connessione della **Borel riducibilità tra relazioni di isomorfismo tra diverse teorie e la teoria della stabilità**.

Riguardo i modelli numerabili e la teoria descrittiva su 2^ω, questa connessione è molto debole, e talvolta anche inesistente.

Da 2^ω a 2^κ

La quarta domanda riguarda la connessione esistente tra la teoria descrittiva degli insiemi e la teoria dei modelli. Particolarmente interessante risulta essere la connessione della **Borel riducibilità tra relazioni di isomorfismo tra diverse teorie e la teoria della stabilità**.
Riguardo i modelli numerabili e la teoria descrittiva su 2^ω, questa connessione è molto debole, e talvolta anche inesistente.
Quando invece si passa all'analisi dei modelli **più che numerabili di taglia** κ, si ha, abbastanza sorprendentemente, che tale connessione diventa di gran lunga più stretta e interessante.

Da 2^ω a 2^κ

La quarta domanda riguarda la connessione esistente tra la teoria descrittiva degli insiemi e la teoria dei modelli. Particolarmente interessante risulta essere la connessione della **Borel riducibilità tra relazioni di isomorfismo tra diverse teorie e la teoria della stabilità**.
Riguardo i modelli numerabili e la teoria descrittiva su 2^ω, questa connessione è molto debole, e talvolta anche inesistente.
Quando invece si passa all'analisi dei modelli **più che numerabili di taglia** κ, si ha, abbastanza sorprendentemente, che tale connessione diventa di gran lunga più stretta e interessante.
Molti risultati a riguardo sono stati ottenuti da Friedman, Hittynen e Kulikov in *"Generalized descriptive set theory and classification theory"*, Memoirs of the AMS. Altri risultati inerenti allo studio delle relazioni di isomorfismo tra teorie dal punto di vista della teoria descrittiva sono state ottenute da Friedman e Motto Ros.

Spazio di Cantor generalizzato

Questa forte connessione tra teoria dei modelli più che numerabili e teoria descrittiva degli insiemi ha stimolato molto in questi anni lo studio dell'insieme 2^κ, i cui elementi codificano modelli di taglia $\kappa > \omega$.

Spazio di Cantor generalizzato

Questa forte connessione tra teoria dei modelli più che numerabili e teoria descrittiva degli insiemi ha stimolato molto in questi anni lo studio dell'insieme 2^κ, i cui elementi codificano modelli di taglia $\kappa > \omega$.

Spazio di Cantor generalizzato: $2^\kappa := \{f : f : \kappa \to 2 \text{ funzione}\}$,

Topologia: generata dagli aperti di base $[s] := \{x \in 2^\kappa : x \supset s\}$, con $s \in 2^{<\kappa}$.

(N.B.: il modo di generalizzare la topologia è ben lungi dall'essere unico; ad esempio si potrebbe considerare la topologia generata dagli aperti di base $[s]$, ma con $s : \kappa \to 2$ funzione parziale avente dominio di taglia finita.)

Sviluppi recenti della ricerca

Teoria descrittiva generalizzata: studio di 2^κ e κ^κ da un punto di vista topologico *à la Kechris* (Andretta, Halko, Lücke, Motto Ros, Schlicht).

Teoria degli insiemi dei reali generalizzati: metodo del forcing applicato a questioni inerenti alla teoria descrittiva e ai *cardinal invariant* di 2^κ (Blass, Brendle, Brooke-Taylor, Khomskii, L., Rosłanowsky, Shelah, Zapletal).

Connessioni con la teoria dei modelli: Borel riducibilità tra relazioni di isomorfismo e teoria della stabilità (Friedman, Hyttinen, Kulikov, Vänäänen).

Il problema della misura su 2^κ

Nel tempo rimanente mi soffermerò su un problema aperto di base nello studio di 2^κ.

Il problema della misura su 2^κ

Nel tempo rimanente mi soffermerò su un problema aperto di base nello studio di 2^κ.
Nel definire 2^κ e la sua topologia, molti avranno notato l'**assenza di una definizione di misura che generalizzasse la misura di Lebesgue**. Ciò non è stato dovuto ad una mera dimenticanza, ma al fatto che non si sa ancora come generalizzare tale concetto. I diversi tentativi operati in questo ambito hanno dato risultati non pienamente soddisfacenti.

Un aiuto giunto dal metodo del forcing

Vediamo come evitare il problema utilizzando il metodo del forcing per cercare di ottenere una nozione di insieme *nullo*.

Definizione

- $T \subseteq 2^{<\omega}$ *è detto albero perfetto sse* T *è chiuso per segmenti iniziali (i.e., ogni* $s \subseteq t$ *è in* T *se* $t \in T$*) e* $\forall s \in T \exists t \in T$ *tale che* $s \subseteq t$ *e* t *è splitting.*
- *Diciamo che* $\mathbb{P}$ *è un forcing ad albero (tree-forcing) sse ogni* $p \in P$ *è un albero perfetto, e definiamo* $q \leq p \Leftrightarrow q \subseteq p$*.*
- *Un insieme* X *di reali è detto* $\mathbb{P}$*-nullo sse* $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \leq p (X \cap [q] = \emptyset)$.

Esempi

- *Cohen forcing* $\mathbb{C} := \{T_s : s \in 2^{<\omega}\}$, dove $T_s := \{t \in 2^{<\omega} : s \subseteq t\}$.
- *Sacks forcing* $\mathbb{S} := \{T \subseteq 2^{<\omega} : T \text{ albero perfetto}\}$.
- *random forcing* $\mathbb{B} := \{ T \subseteq 2^{<\omega} : T \text{ albero perfetto} \wedge \mu([T]) > 0 \}$.

Notiamo che

$$X\ \mathbb{C}\text{-}\textit{nullo} \Leftrightarrow X \text{chiuso raro (nowhere dense)}$$

$$X\ \mathbb{B}\text{-}\textit{nullo} \Leftrightarrow X \text{nullo nel senso della misura di Lebesgue}$$

Idea

Il random forcing $\mathbb{B}$ soddisfa alcune peculiari **proprietà combinatoriche non direttamente legate alla misura**. Tra di esse le principali sono le seguenti:

- $\mathbb{B}$ soddisfa la ccc
- $\mathbb{B}$ è ω^ω-bounding, i.e., $\Vdash_{\mathbb{B}} \forall x \in \omega^\omega \exists z \in \omega^\omega \cap V \forall n (x(n) \leq z(n))$.

L'idea è dunque quella di trovare un forcing ad albero su 2^κ , invece di 2^ω, il quale soddisfi le proprietà analoghe.

Questo approccio è stato seguito da Shelah. In particolare in *"On CON($\mathfrak{d}_\kappa > cov(\mathcal{M})$)*, Trans. of AMS (2014), Shelah pone la seguente domanda:

Problema. Sia κ inaccessible (i.e., $\forall \alpha < \kappa(2^\alpha < \kappa)$). È possibile definire un forcing (ad albero) che aggiunga elementi di 2^κ e sia contemporaneamente $< \kappa$-chiuso, κ^κ-bounding e soddisfi la κ^+-cc?

Questo approccio è stato seguito da Shelah. In particolare in *"On CON($\mathfrak{d}_\kappa > cov(\mathcal{M})$)*, Trans. of AMS (2014), Shelah pone la seguente domanda:
Problema. Sia κ inaccessible (i.e., $\forall \alpha < \kappa (2^\alpha < \kappa)$). È possibile definire un forcing (ad albero) che aggiunga elementi di 2^κ e sia contemporaneamente $< \kappa$-chiuso, κ^κ-bounding e soddisfi la κ^+-cc?

Shelah stesso risolve il problema, ma per κ **debolmente compatto** (grande cardinale più forte di un inaccessible). La sua costruzione richiede la Π^1_1-*indescribability* per dimostrare che il forcing è κ^κ-bounding.

Questo approccio è stato seguito da Shelah. In particolare in *"On CON($\mathfrak{d}_\kappa > cov(\mathcal{M})$)*, Trans. of AMS (2014), Shelah pone la seguente domanda:
Problema. Sia κ inaccessible (i.e., $\forall \alpha < \kappa (2^\alpha < \kappa)$). È possibile definire un forcing (ad albero) che aggiunga elementi di 2^κ e sia contemporaneamente $< \kappa$-chiuso, κ^κ-bounding e soddisfi la κ^+-cc?

Shelah stesso risolve il problema, ma per κ **debolmente compatto** (grande cardinale più forte di un inaccessible). La sua costruzione richiede la Π^1_1-*indescribability* per dimostrare che il forcing è κ^κ-bounding.

Il nostro lavoro risolve il problema di Shelah, per κ **inaccessibile** e non necessariamente debolmente compatto. Il lavoro è in collaborazione con Sy David Friedman.

Richiamiamo alcune definizioni e notazioni che andremo ad utilizzare:

- $S^{\kappa}_{\kappa^+} := \{\alpha < \kappa^+ : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$.

Richiamiamo alcune definizioni e notazioni che andremo ad utilizzare:

- $S^{\kappa}_{\kappa^+} := \{\alpha < \kappa^+ : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$.
- $\Diamond(S^{\kappa}_{\kappa^+})$ è l'enunciato che asserisce che esiste una sequenza $\{D_\lambda : \lambda < \kappa^+\}$ (dove ogni $D_\lambda \subseteq \lambda$) che soddisfa

$$\forall A \subseteq \kappa^+, \{\lambda \in S^{\kappa}_{\kappa^+} : A \cap \lambda = D_\lambda\} \text{ è stazionario }.$$

Richiamiamo alcune definizioni e notazioni che andremo ad utilizzare:

- $S^{\kappa}_{\kappa^+} := \{\alpha < \kappa^+ : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$.
- $\Diamond(S^{\kappa}_{\kappa^+})$ è l'enunciato che asserisce che esiste una sequenza $\{D_\lambda : \lambda < \kappa^+\}$ (dove ogni $D_\lambda \subseteq \lambda$) che soddisfa

$$\forall A \subseteq \kappa^+, \{\lambda \in S^{\kappa}_{\kappa^+} : A \cap \lambda = D_\lambda\} \text{ è stazionario } .$$

- $T \in \mathbb{S}^{\text{club}}$ sse
  T perfetto $\wedge \forall x \in [T](\{\xi < \kappa : x{\restriction}\xi \text{ splitting}\} \in \textsc{Cub})$.

Richiamiamo alcune definizioni e notazioni che andremo ad utilizzare:

- $S^{\kappa}_{\kappa^+} := \{\alpha < \kappa^+ : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$.
- $\diamondsuit(S^{\kappa}_{\kappa^+})$ è l'enunciato che asserisce che esiste una sequenza $\{D_\lambda : \lambda < \kappa^+\}$ (dove ogni $D_\lambda \subseteq \lambda$) che soddisfa

$$\forall A \subseteq \kappa^+, \{\lambda \in S^{\kappa}_{\kappa^+} : A \cap \lambda = D_\lambda\} \text{ è stazionario .}$$

- $T \in \mathbb{S}^{\mathrm{club}}$ sse
  T perfetto $\wedge \forall x \in [T](\{\xi < \kappa : x{\restriction}\xi \text{ splitting}\} \in \textsc{Cub})$.
- $t \in T(\gamma)$ sse $ot(\{s \in \textsc{Split}(T) : s \subset t \wedge s \in \textsc{Split}(T)\}) = \gamma$
- $T' \leq_\gamma T$ sse $T' \leq T$ e $\forall t \in T(t \in T(\gamma) \Leftrightarrow t \in T'(\gamma))$.

Andiamo a costruire, ricorsivamente su $\lambda < \kappa^+$, una sequenza di forcing ad albero $\{\mathbb{F}_\lambda : \lambda < \kappa^+\}$ con le seguenti proprietà:

- $\mathbb{F}_\lambda \subseteq \mathbb{S}^{\text{club}}$ e $|\mathbb{F}_\lambda| \leq \kappa$;
- $\forall \alpha \leq \lambda \forall T \in \mathbb{F}_\alpha \forall \gamma < \kappa \exists T' \leq_\gamma T (T' \in \mathbb{F}_\lambda)$;
- $\forall T \in \mathbb{F}_\lambda \forall t \in T (T_t \in \mathbb{F}_\lambda)$.

Andiamo a costruire, ricorsivamente su $\lambda < \kappa^+$, una sequenza di forcing ad albero $\{\mathbb{F}_\lambda : \lambda < \kappa^+\}$ con le seguenti proprietà:

- $\mathbb{F}_\lambda \subseteq \mathbb{S}^{\text{club}}$ e $|\mathbb{F}_\lambda| \leq \kappa$;
- $\forall \alpha \leq \lambda \forall T \in \mathbb{F}_\alpha \forall \gamma < \kappa \exists T' \leq_\gamma T(T' \in \mathbb{F}_\lambda)$;
- $\forall T \in \mathbb{F}_\lambda \forall t \in T(T_t \in \mathbb{F}_\lambda)$.

Fissiamo una sequenza diamond $\{D_\lambda : \lambda < \kappa^+\}$.

La costruzione principale

1. $\mathbb{F}_0 := \{(2^{<\kappa})_t : t \in 2^{<\kappa}\}$.
2. $\mathbb{F}_{\lambda+1} := \mathbb{F}_\lambda$.
3. Caso $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$: Sia $\{T^i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\} \subseteq \mathbb{F}_{<\lambda}$ tale che $i < j \Rightarrow T^j \leq T^i$. Aggiungiamo dunque $\bigcap_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} T^i$ a $\mathbb{F}_\lambda$.
4. Caso $\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa$:
   - 4.a Supponiamo $D_\lambda \subseteq \lambda$ codifichi una anticatena massimale A_λ in $\mathbb{F}_{<\lambda}$. Per ogni $T \in \mathbb{F}_{<\lambda}$, $\gamma < \kappa$, costruiamo una κ-*fusion sequence* $\{T^i : i < \kappa\}$ tale che
     1. $T =: T^0 \geq_\gamma T^1 \geq_{\gamma+1} T^2 \geq_{\gamma+2} \cdots \geq_{\gamma+i} T^{i+1} \geq_{\gamma+i+1} \ldots$
     2. $T^1 := \bigcup\{S_t : t \in T(\gamma)\}$, dove ogni $S_t \leq T_t$ e S_t "colpisce" A_λ, i.e., esiste $S^* \in A_\lambda$ tale che $S_t \parallel S^*$.

   Aggiungiamo dunque $\bigcap_{i<\kappa} T^i$ in $\mathbb{F}_\lambda$.

4.b Supponiamo $D_\lambda \subseteq \lambda$ codifichi $\{A_{i,j} : i < \kappa, j < \kappa\}$, dove per ogni $i < \kappa$, $\bigcup_{j<\kappa} A_{i,j}$ risulta essere una anticatena massimale in $\mathbb{F}_{<\lambda}$ e $j_0 \neq j_1 \Rightarrow A_{i,j_0} \cap A_{i,j_1} = \emptyset$. Per ogni $T \in \mathbb{F}_{<\lambda}$, $\gamma < \kappa$, costruiamo una κ-*fusion sequence* $\{T^i : i < \kappa\}$ tale che

1. $T =: T^0 \geq_\gamma T^1 \geq_{\gamma+1} T^2 \geq_{\gamma+2} \cdots \geq_{\gamma+i} T^{i+1} \geq_{\gamma+i+1} \cdots$.
2. Per ogni $i < \kappa$, $T^{i+1} := \bigcup\{S_t^{i+1} : t \in T^i(\gamma + i)\}$, dove ogni $S_t^{i+1} \leq T_t^i$ e S_t^{i+1} colpisce $\bigcup_{j<2^\kappa} A_{i,j}$, ed inoltre T^{i+1} forza che il generico colpisca $\bigcup_{j \in I_i} A_{i,j}$, per un certo I_i di taglia $\leq 2^i$.

Aggiungiamo dunque $\bigcap_{i<\kappa} T^i$ in $\mathbb{F}_\lambda$.

Poniamo infine

$$\mathbb{F} := \bigcup_{\lambda<\kappa^+} \mathbb{F}_\lambda.$$

Proposizione

$\mathbb{F}$ è $< \kappa$-chiuso, κ^+-cc e κ^κ-bounding.

Proposizione

$\mathbb{F}$ *è* $< \kappa$*-chiuso,* κ^+*-cc e* κ^κ*-bounding.*

Cenno di dimostrazione.

- $< \kappa$-chiusura: segue dal punto 3.
- κ^+-cc: I due punti cruciali sono:
  - se A_λ è un'anticatena massimale in $\mathbb{F}_{<\lambda}$ codificata da D_λ, allora A_λ rimane un'anticatena massimale in $\mathbb{F}_\lambda$;
  - se A_λ è un'anticatena massimale in $\mathbb{F}_\lambda$, allora essa rimane un'anticatena massimale in $\mathbb{F}$.

. . . .

- κ^κ-bounding: Dato $\dot{x}$, $\mathbb{F}$-nome per un elemento di κ^κ, e $T \in \mathbb{F}$, l'idea è di costruire $T' \leq T$ mediante κ-fusione e $f \in \kappa^\kappa \cap V$, in modo tale che $T' \Vdash \forall\lambda(\dot{x}(\lambda) \leq f(\lambda))$.

Il punto 4.b garantisce che al passo λ della costruzione della κ-fusion sequence si possa definire $T_{\lambda+1} \leq_\lambda T_\lambda$ ed un insieme $B_{\lambda+1}$ di taglia $\leq 2^{\lambda+1}$ tale per cui $T_{\lambda+1} \Vdash \dot{x}(\lambda+1) \in B_{\lambda+1}$.
Ponendo dunque $T' := \bigcap_{\lambda<\kappa} T_\lambda$ e $f(\lambda) := \sup B_\lambda$, si ottiene

$$T' \Vdash \forall\lambda < \kappa, \dot{x}(\lambda) \leq f(\lambda).$$

$\square$

Sia $\mathcal{I}_{\mathbb{F}}$ la famiglia degli insiemi $\mathbb{F}$-nulli.

Proposizione

Esiste $X \subseteq 2^\kappa$ tale che $X \in \mathcal{M}$ e $2^\kappa \setminus X \in \mathcal{I}_{\mathbb{F}}$.

Sia $\mathcal{I}_{\mathbb{F}}$ la famiglia degli insiemi $\mathbb{F}$-nulli.

Proposizione

Esiste $X \subseteq 2^\kappa$ tale che $X \in \mathcal{M}$ e $2^\kappa \setminus X \in \mathcal{I}_{\mathbb{F}}$.

Cenno di dimostrazione.

L'idea consiste nel definire una anticatena massimale di $\mathbb{F}$ (di taglia dunque al più κ) $\{A_j : j < \kappa\}$, tale che ogni $[A_j]$ sia magro. Così facendo si ottiene $X := \bigcup_{j<\kappa}[A_j]$ desiderato.
Il punto cruciale è la dimostrazione che per ogni $T \in \mathbb{F}$ esiste $T' \leq T$ magro, $T' \in \mathbb{F}$. $\square$

Conclusioni e problemi aperti

Alcuni problemi riguardanti il forcing $\mathbb{F}$:

Conclusioni e problemi aperti

Alcuni problemi riguardanti il forcing $\mathbb{F}$:

1. Che rapporto c'è con il forcing di Shelah per κ debolmente compatto?

Conclusioni e problemi aperti

Alcuni problemi riguardanti il forcing $\mathbb{F}$:

1. Che rapporto c'è con il forcing di Shelah per κ debolmente compatto?
2. $\Vdash_{\mathbb{F}} (2^\kappa \cap V) \in \mathcal{M}$?

Conclusioni e problemi aperti

Alcuni problemi riguardanti il forcing $\mathbb{F}$:

1. Che rapporto c'è con il forcing di Shelah per κ debolmente compatto?
2. $\Vdash_{\mathbb{F}} (2^\kappa \cap V) \in \mathcal{M}$?
3. $\mathcal{M} \leq_T \mathcal{I}_{\mathbb{F}}$?

Conclusioni e problemi aperti

Alcuni problemi riguardanti il forcing $\mathbb{F}$:

1. Che rapporto c'è con il forcing di Shelah per κ debolmente compatto?
2. $\Vdash_{\mathbb{F}} (2^\kappa \cap V) \in \mathcal{M}$?
3. $\mathcal{M} \leq_T \mathcal{I}_{\mathbb{F}}$?
4. Quale è il comportamento della nozione di misurabilità associata al nostro forcing $\mathbb{F}$?

Vi ringrazio per l'attenzione!

Appendice: Teoria descrittiva e Teoria dei modelli

Data una teoria T, possiamo definire

$$M_T^\omega := \{x \in 2^\omega : A_x \models T\}$$

$$I_T^\omega := \{(x,y) \in M_T^\omega \times M_T^\omega : A_x \cong A_y\}$$

Quest'ultima è una relazione binaria su $2^\omega \times 2^\omega$ e può dunque essere studiata in termini di Borel riducibilità; date $E, F \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ relazioni binarie, diciamo che E è *Borel-riducibile a* F ($E \leq_B F$) se esiste $h : 2^\omega \to 2^\omega$ tale che per ogni x, y si ha

$$(x,y) \in E \Leftrightarrow (h(x), h(y)) \in F.$$

(Moralmente, essa ci dice che E è meno complessa di F.)
Interessanti studi sulle relazioni di isomorfismo e di immergibilità in termini di Borel riducibilità sono stati sviluppati da Rosendal, Louveau, Friedman, Motto Ros, Kulikov e Hittynen.

Domanda: La Borel riducibilità ci dice qualcosa riguardo al rapporto di forza tra diverse teorie?

Domanda: La Borel riducibilità ci dice qualcosa riguardo al rapporto di forza tra diverse teorie?
Più precisamente: Se T, T' sono due teorie, è possibile dimostrare che se T è più semplice di T', allora si ha $I_T^\omega \leq_B I_{T'}^\omega$?
In generale, restringendo l'attenzione su modelli numerabili, la risposta è negativa.
Come esempio si possono considerare T come la teoria di $(\mathbb{Q}, \leq)$ e T' come la teoria degli spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:

- T è "più complicata" di T', essendoci enunciati riguardo ai modelli di T non decidibili in ZFC;
- tuttavia, esiste un unico modello numerabile per T, mentre ve ne sono una quantità infinita per T', e dunque si ha

$$I_T^\omega \leq_B I_{T'}^\omega \text{ e } I_{T'}^\omega \not\leq_B I_T^\omega$$

Modelli più che numerabili

Tuttavia, se si considera il medesimo approccio, ma con modelli di taglia κ più che numerabile, si ottiene, abbastanza sorprendentemente una più stretta relazione tra Borel riducibilità la *stability theory*.

Affinché le definizioni di M_T^κ e I_T^κ abbiano senso, è necessario codificare i modelli di taglia κ con elementi di 2^κ.

$$M_T^\kappa := \{x \in 2^\kappa : A_x \models T\}$$

$$I_T^\kappa := \{(x, y) \in M_T^\kappa \times M_T^\kappa : A_x \cong A_y\}$$

Molti risultati a riguardo sono stati ottenuti da Friedman, Hittynen e Kulikov in *"Generalized descriptive set theory and classification theory"*, Memoirs of the AMS.