Amoeba for uncountables

Giorgio Laguzzi

Universität Freiburg

Welcome Home - Torino 2015

Retta reale, Spazio di Cantor e di Baire

- **Real Line** $\mathbb{R}$, con la topologia standard e la misura di Lebesgue.

Retta reale, Spazio di Cantor e di Baire

- **Real Line** $\mathbb{R}$, con la topologia standard e la misura di Lebesgue.
- **Cantor Space** $2^\omega := \{f : f : \omega \to 2 \text{ funzione}\}$,

  Topologia: generata dagli aperti di base $[s] := \{x \in 2^\omega : x \supset s\}$, con $s \in 2^{<\omega}$;
  Misura: generata da $\mu([s]) = 2^{-|s|}$.

Retta reale, Spazio di Cantor e di Baire

- **Real Line** $\mathbb{R}$, con la topologia standard e la misura di Lebesgue.
- **Cantor Space** $2^\omega := \{f : f : \omega \to 2 \text{ funzione}\}$,

  Topologia: generata dagli aperti di base $[s] := \{x \in 2^\omega : x \supset s\}$, con $s \in 2^{<\omega}$;
  Misura: generata da $\mu([s]) = 2^{-|s|}$.
- **Baire Space** $\omega^\omega := \{f : f : \omega \to \omega \text{ funzione}\}$,

  Topologia: generata dagli aperti di base $[s] := \{x \in \omega^\omega : x \supset s\}$, con $s \in \omega^{<\omega}$;
  Misura: generata da $\mu([s]) = \prod_{n<|s|} 2^{-s(n)+1}$.

Gli spazi di Baire e di Cantor sono utili in teoria degli insiemi, poiché:

Gli spazi di Baire e di Cantor sono utili in teoria degli insiemi, poiché:

* permettono di studiare problemi topologici e di teoria della misura inerenti i numeri reali utilizzando la **combinatorica delle successioni infinite e degli alberi sui numeri naturali**;

Gli spazi di Baire e di Cantor sono utili in teoria degli insiemi, poiché:

* permettono di studiare problemi topologici e di teoria della misura inerenti i numeri reali utilizzando la **combinatorica delle successioni infinite e degli alberi sui numeri naturali**;

** costituiscono un ponte essenziale tra la **teoria dei modelli e la teoria (descrittiva) degli insiemi**, in quanto un modello *numerabile* può essere codificato come un elemento di questi spazi, e la relazione di *isomorfismo* può essere codificata come una relazione binaria su 2^ω e ω^ω.

Tree-forcing

Uno dei principali oggetti di studio della teoria degli insiemi dei reali sono i cosidetti *tree-forcing*. Questi giocano un ruolo importante in molte applicazioni di tale ramo della teoria degli insiemi e della teoria descrittiva.

Definizione

- $T \subseteq 2^{<\omega}$ *è detto albero perfetto sse* T *è chiuso per segmenti iniziali (i.e., every* $s \subseteq t$ *è in* T *se* $t \in T$*) e* $\forall s \in T \exists t \in T$ *tale che* $s \subseteq t$ *e* t *è splitting.*
- *Diciamo che* $\mathbb{P}$ *è un forcing ad albero (tree-forcing) sse ogni* $p \in P$ *è un albero perfetto, e definiamo* $q \leq p \Leftrightarrow q \subseteq p$.

Esempi

- *Cohen forcing* $\mathbb{C} := \{T_s : s \in 2^{<\omega}\}$, dove $T_s := \{t \in 2^{<\omega} : s \subseteq t\}$.
- *Sacks forcing* $\mathbb{S} := \{T \subseteq 2^{<\omega} : T \text{ albero perfetto}\}$.
- *random forcing* $\mathbb{B} := \{T \subseteq 2^{<\omega} : T \text{ albero perfetto} \wedge \mu([T]) > 0\}$.
- *Miller forcing* $\mathbb{M} := \{T \subseteq \omega^{<\omega} : T \text{ albero perfetto} \wedge (t \text{ splitting } \Rightarrow |\{k \in \omega : t^\frown k \in T| = \omega\})\}$.

Questi forcing aggiungono "un ramo generico", ovvero un nuovo numero reale.

Amoeba forcing

In molti casi per problemi inerenti la separazione di proprietà di regolarità e di invarianti cardinali, risulta utile utilizzare forcing che garantiscano di aggiungere **"molti reali generici"**. Questi tipi di forcing vengono chiamati **amoeba forcing**.
Ad esempio un **amoeba Sacks** sarà un forcing che aggiunge un **albero perfetto** i cuoi rami sono **Sacks generici**. Vediamo una definizione nel dettaglio.

Amoeba Sacks

Definizione

Definiamo $\mathbb{AS}$ il poset formato dalle coppie del tipo (n, T), con T albero perfetto e $n \in \omega$. L'ordine è dato da:

$$(n', T') \leq (n, T) \Leftrightarrow n' \geq n \wedge T' \subseteq T \wedge T' \upharpoonright n = T \upharpoonright n.$$

Dato G filtro generico per $\mathbb{AS}$, non è difficile verificare che $T_G := \bigcap\{T : (n, T) \in G\}$ e un albero perfetto i cui rami sono Sacks. Nel seguito ci riferiremo a T_G col termine **albero generico**.

Osservazione

Sia T_G l'albero generico e sia $\{t_n : n \in \omega\}$ la successione dei nodi splitting più a sinistra. Definiamo $z \in 2^\omega$ tale che $z(n) = 0$ sse $|t_{n+1}| \leq \min\{|t| : t \in \textsc{Split}(T_G) : t \supsetneq t_n^\frown 0\}$.

Si può verificare abbastanza facilmente che z **risulta essere un reale di Cohen**, siccome è sempre possibile potare un albero perfetto in modo da rendere il nodo splittante successore sinistro più lungo del destro, o viceversa.
Esiste tuttavia un modo per eludere i reali di Cohen, ovvero definire un amoeba Sacks che non aggiunga reali di Cohen.
Diciamo che un albero T è **ordinato** sse l'ordine lessicografico dei nodi splitting rispetta la lunghezza dei nodi stessi.

Definition

Consideriamo il forcing $\mathbb{AS}^*$ formato dalle coppie (n, T), dove T è un albero perfetto ed ordinato e $n \in \omega$. (Come ordine consideriamo lo stesso definito per $\mathbb{AS}$)

Chiaramente, il reale z definito sopra non è più un reale di Cohen (essendo quasi ovunque uguale a zero!) In realtà una dimostrazione complessa e molto tecnica permette di dimostrare che $\mathbb{AS}$ non aggiunge *alcun* reale di Cohen.

Spazio di Cantor generalizzato

Spazio di Cantor generalizzato

In anni recenti ha acquisito un ruolo rilevante in teoria degli insiemi lo studio dello **spazio di Cantor generalizzato** 2^κ. Le ragioni attribuibili a questo forte interesse sono da ricercarsi perlopiù nella forte connessione esistente tra la **teoria descrittiva generalizzata** e la **teoria della stabilità do Shelah**.

Spazio di Cantor generalizzato

In anni recenti ha acquisito un ruolo rilevante in teoria degli insiemi lo studio dello **spazio di Cantor generalizzato** 2^κ. Le ragioni attribuibili a questo forte interesse sono da ricercarsi perlopiù nella forte connessione esistente tra la **teoria descrittiva generalizzata** e la **teoria della stabilità do Shelah**.

Spazio di Cantor generalizzato: $2^\kappa := \{f : f : \kappa \to 2 \text{ funzione}\}$,

Topologia: generata dagli aperti di base $[s] := \{x \in 2^\kappa : x \supset s\}$, con $s \in 2^{<\kappa}$.

(N.B.: il modo di generalizzare la topologia è ben lungi dall'essere unico; ad esempio si potrebbe considerare la topologia generata dagli aperti di base $[s]$, ma con $s : \kappa \to 2$ funzione parziale avente dominio di taglia finita.)

Sviluppi recenti della ricerca

Teoria descrittiva generalizzata: studio di 2^κ e κ^κ da un punto di vista topologico *à la Kechris* (Andretta, Halko, Lücke, Motto Ros, Schlicht).

Teoria degli insiemi dei reali generalizzati: metodo del forcing applicato a questioni inerenti alla teoria descrittiva e ai *cardinal invariant* di 2^κ (Blass, Brendle, Brooke-Taylor, Khomskii, L., Rosłanowsky, Shelah, Zapletal).

Connessioni con la teoria dei modelli: Borel riducibilità tra relazioni di isomorfismo e teoria della stabilità (Friedman, Hyttinen, Kulikov, Vänäänen).

Amoeba Sacks in 2^κ

Club Sacks forcing

Vi sono diverse possibili generalizzazioni del Sacks forcing. Una di quelle maggiormanete considerate (ed anche più longeve) è il cosidetto **club Sacks forcing**.

Definizione

Sia $T \subseteq 2^{<\kappa}$ un albero $< \kappa$-chiuso (ovvero chiuso per sequence di taglia $< \kappa$) e perfetto. Diciamo che T è club Sacks sse per ogni $x \in [T]$ si ha

$$\{\alpha < \kappa : x{\restriction}\alpha \text{ è splitting}\} \text{ è chiuso e illimitato (club).}$$

Chiamiamo **club Sacks forcing** $\mathbb{S}$ il poset formato da alberi perfetti in $2^{<\kappa}$ che soddisfino tale condizione.

Amoeba Sacks

Definizione

Definiamo $\mathbb{AS}$ il poset formato dalle coppie del tipo (q, T), con T albero perfetto club in $2^{<\kappa}$, $p \subset T$ sottoalbero club. L'ordine è dato da:

$$(p', T') \leq (p, T) \Leftrightarrow p' \supseteq^{end} p \wedge T' \subseteq T.$$

Dato G filtro generico per $\mathbb{AS}$, non è difficile verificare che $T_G := \bigcap\{T : (\alpha, T) \in G\}$ e un albero perfetto i cui rami sono Sacks. Nel seguito ci riferiremo a T_G col termine **albero generico**.

Alune proprietà importanti:

- $\mathbb{AS}$ soddisfa l'assioma A (in particolare è κ-proper), per κ inaccessible.
- $\mathbb{AS}$ soddisfa la **quasi pure decision**: per ogni $D \subseteq \mathbb{AS}$ denso, $(p, T) \in \mathbb{AS}$, esiste T' tale che per ogni $(q, S) \leq (p, T')$,

$$(q, S) \in D \Rightarrow (q, T' \restriction q) \in D.$$

Così definito, $\mathbb{AS}$ aggiunge κ-reali di Cohen, come nel caso ω. Tuttavia sappiamo che possiamo considerare alberi perfetti ordinati per eludere questo tipo di reale di Cohen.
Domanda. È sufficiente fare ciò per *sopprimere* tutti i κ-reali di Cohen?

Alune proprietà importanti:

- $\mathbb{AS}$ soddisfa l'assioma A (in particolare è κ-proper), per κ inaccessible.
- $\mathbb{AS}$ soddisfa la **quasi pure decision**: per ogni $D \subseteq \mathbb{AS}$ denso, $(p, T) \in \mathbb{AS}$, esiste T' tale che per ogni $(q, S) \leq (p, T')$,

$$(q, S) \in D \Rightarrow (q, T' \restriction q) \in D.$$

Così definito, $\mathbb{AS}$ aggiunge κ-reali di Cohen, come nel caso ω. Tuttavia sappiamo che possiamo considerare alberi perfetti ordinati per eludere questo tipo di reale di Cohen.
Domanda. È sufficiente fare ciò per *sopprimere* tutti i κ-reali di Cohen? NO!

Alune proprietà importanti:

- $\mathbb{AS}$ soddisfa l'assioma A (in particolare è κ-proper), per κ inaccessible.
- $\mathbb{AS}$ soddisfa la **quasi pure decision**: per ogni $D \subseteq \mathbb{AS}$ denso, $(p, T) \in \mathbb{AS}$, esiste T' tale che per ogni $(q, S) \leq (p, T')$,

$$(q, S) \in D \Rightarrow (q, T' \restriction q) \in D.$$

Così definito, $\mathbb{AS}$ aggiunge κ-reali di Cohen, come nel caso ω. Tuttavia sappiamo che possiamo considerare alberi perfetti ordinati per eludere questo tipo di reale di Cohen.
Domanda. È sufficiente fare ciò per *sopprimere* tutti i κ-reali di Cohen? NO!

Esiste infatti un κ-reale di Cohen che non si presentava nel caso classico.

Esiste infatti un κ-reale di Cohen che non si presentava nel caso classico.

Osservazione

Fissiamo $S \subseteq \kappa$ stazionario e co-stazionario. Sia $\{t_\alpha : \alpha < \kappa\}$ la successione degli splitnode più a sinistra. Definiamo $z \in 2^\kappa$ come segue:

$$z(\alpha) = 1 \Leftrightarrow |t_{\alpha+1}| \in S.$$

z risulta essere di Cohen.

Infatti, fissata $(p, T) \in \mathbb{AS}$, sia $\{t_\alpha : \alpha \leq \delta\}$ la successione di splitnode a sinistra già decisa da (p, T). Siccome abbiamo "club many" splitnode sopra t_δ, possiamo liberamente restringere T in modo da "colpire" o meno S, essendo S sia stazionario che co-stazionario. In questo modo si può liberamente determinare che $|t_{\delta+1}|$ sia in S o meno. Fatto ciò possiamo dunque estendere p congelando il $\delta + 1$-esimo splitnode nel nuovo albero $\subseteq T$.

In realtà è possibile dimostrare un risultato molto più forte, in netto contrasto con il caso ω

Teorema

Se esiste un albero T assoluto Sacks generico per M, allora esiste un κ-reale di Cohen per M.

Il termine *assoluto* deve essere inteso nel seguente modo: per ogni forcing $< \kappa$-chiuso $\mathbb{P}$,

$$V \models \text{“}T \text{ assoluto per } M \Leftrightarrow V^{\mathbb{P}} \models \text{“}T \text{ assoluto per } M.$$

Codifica mediante insiemi stazionari

Sia κ inaccessibile. Fissiamo una famiglia $\{S_\tau : \tau \in 2^{<\kappa}\}$ di insiemi stazionari a due a due disgiunti.

Lemma (Pruning Lemma)

Sia $T \in \mathbb{S}^{\text{club}}$, $\{D_\xi : \xi < \kappa\}$ una famiglia (decrescente) di aperti densi di $\mathbb{C}$. Esiste $T' \in \mathbb{S}^{\text{club}}$, $T' \subseteq T$ tale che per ogni $\alpha < \kappa$, esiste un unico $\tau_\alpha \in 2^{<\kappa}$ per cui si ha

$$\forall t \in \textsc{Split}_{\alpha+1}(T') \forall s \in 2^{\leq\alpha}, |t| \in S_{\tau_\alpha} \text{ and } \in s^\frown\tau_\alpha \in D_\alpha.$$

Un passo chiave per dimostrare il Pruning Lemma è il seguente risultato

Lemma (Coding Lemma)

Dati $T \in \mathbb{S}^{\text{club}}$, $\alpha \in \kappa$, $\tau \in 2^{<\kappa}$, *esiste* $T' \leq_{\alpha+1} T$, $T' \in \mathbb{S}^{\text{club}}$ *tale che*

$$\forall t \in \text{SPLIT}_{\alpha+1}(T'), |t| \in S_\tau.$$

Cenno di dimostrazione.

Per ogni $t \in \text{SPLIT}_{\alpha+1}(T)$, $i \in \{0,1\}$, prendiamo $\sigma(t,i) \in T$ tale che $\sigma(t,i) \supseteq t^\frown i$ e $|\sigma(t,i)| \in S_\tau$. Notiamo che è possibile fare ciò essendo S_τ stazionario ed essendoci "club many" splitnode che estendono $t^\frown i$. Inoltre $\tau' \neq \tau$, $|\sigma(t,i)| \notin S_{\tau'}$, essendo gli stazionari a due a due disgiunti. Si ponga infine
$T' := \bigcup\{T_{\sigma(t,i)} : t \in \text{SPLIT}_{\alpha+1}(T), i \in \{0,1\}\}$. $\square$

Alberi Sacks e κ-reali di Cohen

Teorema

Se esiste un albero T assoluto Sacks generico per M, allora esiste un κ-reale di Cohen per M.

Cenno di dimostrazione.

Mediante un uso appropriato del Cohen forcing è possiblie "estrarre" una successione $\{T^i : i < \kappa\}$ di alberi Sacks tale che per ogni $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto denso esiste un T^i che soddisfa il Pruning Lemma per tale D. Per ogni T^i, si consideri la corrispondente successione $\{\tau^i_\alpha : \alpha < \kappa\}$ definita dal Pruning Lemma. Definiamo infine $\mathbf{z} := \bigcup_{i<\kappa} \sigma_\mathbf{i}$, dove i σ_i sono ricorsivamente definiti come segue: $\sigma_\mathbf{0} := \emptyset$; $\sigma_{\mathbf{i}+1} := \sigma_i^\frown \tau^i_{\alpha_{i+1}}$, dove α_{i+1} soddisfa $2^{\leq \alpha_{i+1}} \ni \sigma_i$; $\sigma_\mathbf{i} := \bigcup_{j<i} \sigma_j$, per i ordinale limite. $\square$

Vi ringrazio per l'attenzione!