Notengebung

Die Gesamtnote für die Übung ergibt sich je zur Hälfte aus der Teilnote Kreuzerlliste und der Teilnote Zwischentest, gerundet auf "freundliche" Weise; für eine positive Benotung müssen beide Teilnoten positiv sein.

Teilnote Kreuzerlliste:

60% – 69% – 4;
70% – 79% – 3;
80% – 89% – 2;
90% – 100% – 1.

Falls Sie weitere Fragen haben, bitte melden Sie sich bei mir.

Übungsblatt 13. 24.06.2015

Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Eine Unterstruktur $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ heißt *elementare* Unterstruktur, wenn

$$\mathfrak{A} \models \varphi[c_0, \ldots, c_{n-1}] \ \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models \varphi[c_0, \ldots, c_{n-1}]$$

für alle L-Formeln $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ und $c_0, \ldots, c_{n-1} \in C$, wobei C die Grundmenge vom $\mathfrak{C}$ ist.

Aufgabe 1. Zeigen Sie[1]: C ist genau dann Grundmenge einer elementaren Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, wenn für alle L-Formeln $\varphi(v, v_1, \ldots, v_n)$ und alle $d_1, \ldots, d_n \in C$ das folgende gilt: Wenn es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[a, d_1, \ldots, d_n]$ gibt, dann gibt es auch ein $c \in C$ sodass $\mathfrak{A} \models \varphi[c, d_1, \ldots, d_n]$.

Hinweis. Die "nicht einfache" Richtung folgt durch Induktion über den Aufbau von φ.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass wenn man eine entscheidbare Theorie um endlich viele Sätze erweitert, erhält man wieder eine entscheidbare Theorie.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass jede entscheidbare L_N-Theorie sich zu einer vollständigen entscheidbaren L_N-Theorie erweitern läßt.

Hinweis. Siehe Schritt 2 im Beweis vom Vollständigkeitssatz.

Aufgabe 4. Sei T eine effektiv axiomatisierbare und wahre L_N-Theoie, und sei f eine in T repräsentierbare Funktion. Beweisen Sie, dass f rekursiv ist.

Hinweis. Zeigen Sie, dass die Relation

$$a_0 = f(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\underline{a_0}, \ldots, \underline{a_n})$$

rekursiv aufzählbar ist, wobei f von φ repräsentierbar ist.

[1] Dieser Satz heißt *Tarski-Vaught-Kriterium.*

Übungsblatt 12. 17.06.2015

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass jede konstante Funktion in $\{\neg \underline{n} = \underline{m} : n \neq m\}$ repräsentierbar ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass wenn man eine entscheidbare Theorie um endlich viele Axiome erweitert, erhält man wieder eine entscheidbare Theorie.

Aufgabe 3. Welche Relationen $R \subset \mathbb{N}$ sind in der leeren L_N-Theorie $T = \emptyset$ repräsentierbar?

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass eine Funktion in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ genau dann repräsentierbar ist, wenn sie arithmetisch ist.

Übungsblatt 11. 10.06.2015

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{M}$ eine Registermaschine, die bei jeder Eingabe $n \in \mathbb{N}$ nach höchstens n^{2015} Schritten hält. Zeigen Sie, daß $F^1_{\mathbb{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Kleene Normalform.

Aufgabe 2. Geben Sie eine Formel an, die die Fakultätsfunktion definiert.

Eine auf einer Teilmenge A von $\mathbb{N}^n$ definierte Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ heißt *partiell rekursiv*, wenn ihr Graph $G_f = \{(\bar{x}, y) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} : \bar{x} \in A, y = f(x)\}$ rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie den *Uniformisierungssatz*: Für jede rekursiv aufzählbare Relation $R \subset \mathbb{N}^{n+1}$ gibt es eine partiell rekursive Funktion f mit Definitionsbereich $\{\bar{x} \in \mathbb{N}^n : \exists y R(\bar{x}, y)\}$ sodass $G_f \subset R$.

Schließen Sie daraus, dass eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, deren Graph rekursiv aufzählbar ist, rekursiv ist (und daher ist ihr Graph auch rekursiv).

Eine Relation $R \subset \mathbb{N}^k$ ist eine Π^0_1-*Relation*[2], wenn $\mathbb{N}^k \setminus R$ rekursiv aufzählbar ist. Zwei Teilmengen A, B von $\mathbb{N}^k$ heißen *rekursiv trennbar*, wenn es eine rekursive Menge $R \subset \mathbb{N}^k$ gibt, die A enthält und zu B disjunkt ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass sich disjunkte Π^0_1-Mengen rekursiv trennen lassen.

Schließen Sie daraus, dass $R \subset \mathbb{N}^k$ genau dann rekursiv ist, wenn R und $\mathbb{N}^k \setminus R$ rekursiv aufzählbar sind.

Hinweis: Wenden Sie den Uniformisierungssatz aus Aufgabe 3.

[2] Die vollständige Definition der arithmetischen Hierarchie finden Sie auf der 91. Seite vom Zieglers Buch.

Übungsblatt 10. 3.06.2015

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass $R \subset \mathbb{N}^k$ (primitiv) rekursiv ist gdw. $R \times \mathbb{N}^m$ so ist, wobei $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Sei $R(\bar{x}, z, y)$ eine primitiv rekursive Relation und seien $b(\bar{x}, z)$, $c(\bar{x})$ primitiv rekursive Funktionen sodass $b(\bar{x}, z) > z$ für alle $(\bar{x}, z)$. Beweisen Sie, dass $f(\bar{x}, z)$ definiert durch $f(\bar{x}, 0) = c(\bar{x})$ und

$$f(\bar{x}, z+1) =$$
$$= \mu y\big[\big(y \leq b(\bar{x}, f(\bar{x}, z)) \wedge R(\bar{x}, f(\bar{x}, z), y)\big) \vee y = b(\bar{x}, f(\bar{x}, z))\big]$$

primitiv rekursiv ist.

Schließen Sie daraus, dass auch die Funktion $f_1(\bar{x}, 0) = c(\bar{x})$,

$$f_1(\bar{x}, z+1) =$$
$$= \mu y\big[\big(f_1(\bar{x}, z) < y \leq b(\bar{x}, f_1(\bar{x}, z)) \wedge R(\bar{x}, f_1(\bar{x}, z), y)\big) \vee y = b(\bar{x}, f_1(\bar{x}, z))\big]$$

primitiv rekursiv ist.

Finden Sie b, c sodass $f_1(\bar{x}, z) = (z+1)$-te Primzahl für alle $\bar{x}, z$.

Aufgabe 3. Sei $S \subset \mathbb{N}^2$ rekursiv. Beschreiben Sie eine Maschine, die bei der Eingabe $|^x$ stoppt gdw. es ein y mit $(x, y) \in S$ gibt.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die folgende Menge nicht rekursiv ist:
$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 :$ existiert Maschine $\mathbb{M}$ sodass $m = \ulcorner \mathbb{M} \urcorner$ und $\mathbb{M}$ bei $|^n$ hält $\}$.

Übungsblatt 9. 27.05.2015

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Relation $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \text{ teilt } y\}$ und die Funktion $p(x) = x$-te Primzahl primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 2. Beweisen Sie: Wenn f eine rekursive Bijektion von $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist, so ist auch f^{-1} rekursiv.

$n \in \mathbb{N}$ *kodiert* die Menge $\mathrm{set}(n) := \{m_1, ..., m_\ell\}$ für die m_i die Potenzen von 2 sind, die in der Binärdarstellung von n vorkommen. In diesem Fall schreiben wir auch, dass $n = \mathrm{code}(\{m_1, ..., m_\ell\})$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $\cap : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto \mathrm{code}(\mathrm{set}(n) \cap \mathrm{set}(m))$ primitiv rekursiv ist.

Zwischentest. Übungen zu “Grundbegriffe der mathematischen Logik”. SS2015 20.05.2015.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt!

Name, Vorname:

Bitte antworten Sie mit **W** (wahr) oder **F** (falsch). Eine richtige Antwort gibt 2 Punkte, eine falsche 0 Punkte.

Fragen.

Sei $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(0) = f(1) = f(2) = 2015$ und $f(n+3) = h(f(n), f(n+1), f(n+2))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f primitiv rekursiv. W

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nicht rekursiv. Dann ist $f + g$ nicht rekursiv. F

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nicht rekursiv. Dann ist $f \circ g$ (Hintereinanderausführung) nicht rekursiv. F

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nicht rekursiv und sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv. Dann ist $f \circ g$ (Hintereinanderausführung) nicht rekursiv. F

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nicht rekursiv und sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv. Dann ist $f + g$ (~~Hintereinanderausführung~~) nicht rekursiv. W

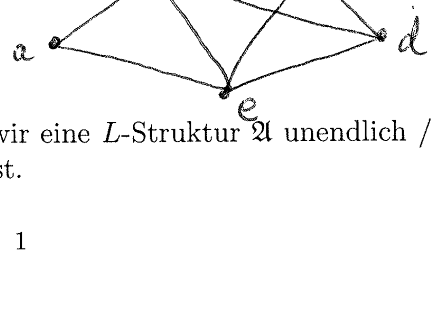
Es gibt eine endliche Sprache L und einen L-Satz ψ, so dass ψ ein unendliches Modell aber kein abzählbar unendliches Modell hat. F

Sei L eine endliche Sprache, T eine L-Theorie und ψ ein L-Satz. Dann gilt $T \vdash \psi$ genau dann, wenn jedes abzählbar unendliche Modell von T auch ein Modell von ψ ist. F

Es gibt eine Sprache L und eine L-Theorie T, so dass T ein unendliches Modell aber kein überabzählbares Modell hat. F

Es gibt eine Sprache L und eine L-Theorie T, so dass T ein unendliches Modell aber kein abzählbar unendliches Modell hat. W

Sei $\mathfrak{G}$ der unten angegebene Graph.



[0]Für eine beliebige Sprache L nennen wir eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ unendlich / abzählbar/ usw., wenn die Grundmenge A von $\mathfrak{A}$ so ist.

[0]20.05.2015

Es gilt $\mathfrak{G} \models \psi_1$ wobei $\psi_1 = \forall x, y((\neg x = y \wedge \neg Exy) \rightarrow \exists z, t(\neg z = t \wedge Exz \wedge Eyz \wedge Ext \wedge Eyt))$. W

Es gilt $\mathfrak{G} \models \psi_2$ wobei $\psi_2 = \exists x, y, z, t(Exy \wedge Eyz \wedge Ezt \wedge \neg Ext)$. W

Es gilt $\mathfrak{G} \models \psi_3$ wobei $\psi_3 = \forall x, y(\neg x = y \rightarrow \forall z(Exz \vee Eyz))$. F

Es gilt $\mathfrak{G} \models \psi_4$ wobei $\psi_4 = ((\forall x Exy \wedge \exists z Ezt) \rightarrow Eyt) \rightarrow (\forall x Exy \rightarrow (\exists z Ezt \rightarrow Eyt))$. W

ψ_1 is allgemeingültig. F

ψ_4 ist eine Tautologie. W

Richtig beantwortete Fragen	Note
9–10	4
11–12	3
13	2
14–15	1.

Übungsblatt 8. 13.05.2015

Aufgabe 1. Konstruieren Sie eine Registermaschine, die die Funktion $f(x, y) = x + y$ berechnet. Zeichnen Sie das Flußdiagramm dieser Maschine.

Aufgabe 2. Beschreiben Sie durch Flußdiagramme Registermaschinen, die Funktionen $g(x, y) = x \cdot y$ und $h(x, y) = x^y$ berechnen. Sie dürfen die Maschine aus Aufgabe 1 benutzen.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie eine Registermaschine, die die Funktion $f(x, y) = |x - y|$ berechnet. Zeichnen Sie das Flußdiagramm dieser Maschine.

Aufgabe 4. Seien $\mathcal{M}_f$ und $\mathcal{M}_g$ Registermaschinen, die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ berechnen. Konstruieren Sie eine Registermaschine, die die Hintereinanderausführung $g(f(x))$ berechnet.

Da wir etwas zu wenig Zeit am vorigen Mittwoch dafür hatten, habe ich mich entschieden, die Lösung von Aufgabe 2 aus dem Übungsblatt 7 zu schreiben.

Sei T eine Theorie, die die Klasse K aller Körper mit Charakteristik $\neq 0$ axiomatisiert (d.h., $K = \mathit{Mod}(T)$). Wir können annehmen, dass T auch die Axiome $\mathit{AxK\ddot{o}r}$ von Körpern enthält (wenn nicht, nehmen wir $T \cup \mathit{AxK\ddot{o}r}$ statt T). Wir werden zeigen, dass T unbedingt ein Modell mit Charakteristik 0 hat, was zu einem Widerspruch führt.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir φ_n als

$$\neg(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} = 0).$$

Sei $T_0 \supset \mathit{AxK\ddot{o}r}$ eine endliche Teilmenge von T. Als K durch T axiomatisiert ist und Körper mit beliebig grosser Charakteristik $n \in \mathbb{N}$ enthält, ist $T_0 \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ in einer Struktur aus K erfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz, gibt es eine Struktur $\mathfrak{A}$, die $T \cup \{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ erfüllt. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein Körper in K mit Charakteristik 0, ein Widerspruch.

Übungsblatt 7. 6.05.2015

Sei L eine Sprache. Für eine L-Theorie T sei

$$Mod_L(T) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } L\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \models T\}$$

die *Modellklasse von T bezüglich L*. Eine Klasse K von L-Strukturen heißt *axiomatisierbar,* wenn es eine Theorie T gibt, so dass $K = Mod_L(T)$.

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 2. Sei K die Klasse aller Körper, die eine (beliebige) endliche Charakteristik haben. Beweisen Sie, dass K nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass wenn ein Satz ψ in allen unendlichen Gruppen wahr ist, gibt es eine natürliche Zahl n, sodass ψ auch in allen endlichen Gruppen wahr ist, die mehr als n Elemente haben.

Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik besagt: *eine Menge T von aussagenlogischen Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.*

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $n \in \mathbb{N}$. Eine *n-Färbung* von G ist eine Abbildung $f : E \to \{0, \dots, n-1\}$ mit der Eigenschaft $f(e_0) \neq f(e_1)$ für alle $(e_0, e_1) \in K$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass G genau dann n-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph von G n-färbbar ist.

Übungsblatt 6. 29.04.2015

Sei T eine L-Theorie und φ eine L-Formel. φ is *T-beweisbar*, $T \vdash_L \varphi$, wenn es $\psi_1, \ldots \psi_n \in T$ gibt für die $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$ beweisbar ist. Ein *T-Beweis von φ* ist eine endliche Folge von Formeln $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, wobei $\varphi_n = \varphi$ und für alle $i \leq n$ ist φ_i eine Tautologie, ein Gleichheitsaxiom, ein $\exists$-Quantorenaxiom, *ein Element von T,* oder sich mithilfe der MP-Regel bzw. der $\exists$-Einführung aus φ_j, φ_k für irgendwelche $j, k < i$ ergibt.

Aufgabe 1. Zeigen Sie ohne Verwendung vom Vollständigkeitssatz, dass $T \vdash_L \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent ist $\Leftrightarrow$ es einen T-Beweis von φ gibt.

Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *elementar äquivalent,* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, wenn in ihnen die gleichen L-Aussagen gelten.

Eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt *endlich* wenn A endlich ist, wobei A die Grundmenge von $\mathfrak{A}$ ist.

Aufgabe 2. Sei L eine Sprache und seien $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ elementar äquivalente L-Strukturen. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{A}_1$ endlich ist gdw. $\mathfrak{A}_2$ ist endlich, und dann $|A_1| = |A_2|$ (A_i ist die Grundmenge von $\mathfrak{A}_i$).

Aufgabe 3. Finden Sie eine endliche Sprache L und eine L-Aussage φ sodass $T := \{\varphi\}$ konsistent ist aber kein endliches Modell hat.

Aufgabe 4. Sei T eine konsistente deduktiv abgeschlossen Theorie. Zeigen Sie, dass T vollständig ist gdw. alle Modelle von T elementar äquivalent sind.

Übungsblatt 5. 22.04.2015

Aufgabe 1. Sei $L = \{P, R\}$ eine Sprache, wobei P (bzw. R) ein 1- (bzw. 2-)stelliges Relationszeichen ist. Welche von diesen Formeln sind erfüllbar? Allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(1) $\exists v_0 \exists v_1 (P(v_0) \wedge P(v_1))$;
(2) $\exists v_0 \forall v_1 (R(v_0, v_0) \wedge \neg R(v_0, v_1))$;
(3) $\exists v_0 \forall v_1 R(v_0, v_1) \to \forall v_1 \exists v_0 R(v_0, v_1)$;
(4) $\forall v_1 \exists v_0 R(v_0, v_1) \to \exists v_0 \forall v_1 R(v_0, v_1)$;
(5) $P(v_0) \to \forall v_1 P(v_1)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln beweisbar[3] sind:

(1) $\forall v_0 (\varphi \wedge \psi) \to (\forall v_0 \varphi \wedge \forall v_0 \psi)$;
(2) $(\exists v_0 \varphi \vee \exists v_0 \psi) \to \exists v_0 (\varphi \vee \psi)$;
(3) $\exists v_0 (\varphi \to \psi) \to (\forall v_0 \varphi \to \exists v_0 \psi)$.

Wenn nötig, verwenden Sie auch $\forall$-Quantorenaxiome und $\forall$-Einführung (Lemma 4.1 im Zieglers Buch).

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine L-Formel beweisbar ist gdw. sie einen L-Beweis hat.

Aufgabe 4. Sei $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ eine L-Formel und $c_1, \ldots, c_n$ eine Folge von paarweise verschiedenen Konstantenzeichen aus L, die in $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ nicht vorkommen. Beweisen Sie, dass

$$\vdash_L \varphi(c_1, \ldots, c_n) \iff \vdash_L \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

.

[3] Es ist i.A. schwierig, Formeln zu beweisen. Es gibt ein Beispiel auf der 17. Seite von http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/skripte/logik.pdf, das hilfreich sein könnte.

Übungsblatt 4. 15.04.2015

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass in $\exists$-Einführung auf die Voraussetzung "x nicht frei in ψ" nicht verzichtet werden darf. D.h., geben Sie eine Sprache L und zwei Formeln φ, ψ an, so dass $\varphi \to \psi$ allgemeingültig ist, und $\exists x\varphi \to \psi$ nicht.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass

$$((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi) \to (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots(\varphi_n \to \psi)\cdots)))$$

eine Tautologie ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass sich jede Funktion $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ durch eine aussagenlogische Formel $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ darstellen läßt, also dass

$$F(\beta(p_1), \ldots, \beta(p_n)) = 1 \text{ iff } \beta \vDash \alpha(p_1, \ldots, p_n)$$

für alle Belegungen β.

Eine L-*Theorie* ist eine Menge von T-Aussagen. Sei T eine L-Theorie und φ eine L-Aussage. Dann *folgt* φ *logisch aus* T, $T \vDash \varphi$, wenn φ in allen Modellen gilt, in denen alle Aussagen $\psi \in T$ gelten. $\varphi \vDash \psi$ bedeutet einfach $\{\varphi\} \vDash \psi$.

Aufgabe 4. Seien φ und ψ L-Formeln. Beweisen Sie, dass

(1) $\exists v(\varphi \wedge \psi) \vDash \exists v\varphi \wedge \exists v\psi$;
(2) $\forall v\varphi \vee \forall v\psi \vDash \forall v(\varphi \vee \psi)$;
(3) $\exists v\varphi \to \forall v\psi \vDash \forall v(\varphi \to \psi)$.

Zeigen Sie, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt (die Umkehrung von $\xi \vDash \zeta$ ist $\zeta \vDash \xi$).

Übungsblatt 3. 25.03.2015

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass $\cong$ eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller L-Strukturen ist. Zeigen Sie auch, dass die Menge der Automorphismen einer L-Struktur $\mathfrak{A}$ zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe bildet.

Eine *positive* L-Formel ist ein Wort, das nach den folgenden Regeln gebildet ist:

- Jede Primformel ist positiv;
- Wenn ψ und φ positiv sind, dann sind auch $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $\exists v_i \varphi$, und $\forall v_i \varphi$ positiv.

Wenn wir im zweiten Teil der obigen Definition auf $\forall v_i \varphi$ (bzw. $\exists v_i \varphi$) verzichten, dann bekommen wir die Definition der *existenziell positiven* (bzw. *universell positiven*) Formeln.

Aufgabe 2. Sei h ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Dann gilt für jede existenziell positive L-Formel ψ und jede Belegung β in $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \psi[\beta] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi[h \circ \beta].$$

Aufgabe 3. Sei h ein surjektiver Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Dann gilt für jede positive L-Formel ψ und jede Belegung β in $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \psi[\beta] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi[h \circ \beta].$$

Sei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen. $\mathfrak{B}$ ist eine *Unterstruktur* von $\mathfrak{A}$, wenn $B \subseteq A$, $f^{\mathfrak{A}} \restriction B^n = f^{\mathfrak{B}}$ für jedes n-stelliges Funktionszeichen $f \in L$, $R^{\mathfrak{A}} \cap B^n = R^{\mathfrak{B}}$ für jedes n-stelliges Relationszeichen $R \in L$, und $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ für jede Konstante $c \in L$.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und $\emptyset \neq B \subseteq A$. Zeigen Sie: die kleinste Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, deren Grundmenge B enthält, besteht aus allen $t^{\mathfrak{A}}[s_0, \ldots, s_n]$, wobei $s_0, \ldots, s_n \in B$ und $t(v_0, \ldots, v_n)$ ein L-Term ist.

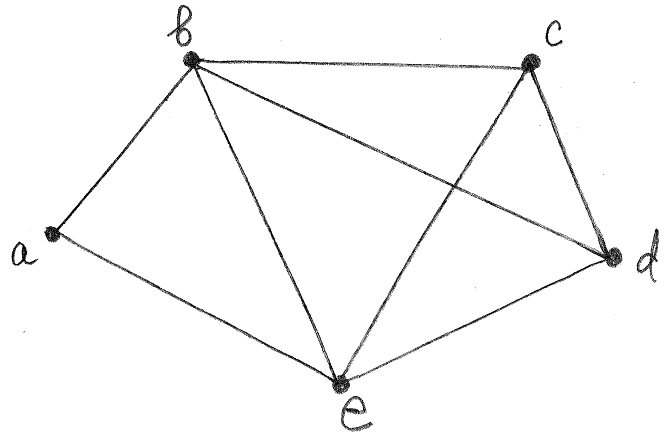
Übungsblatt 2. 18.03.2015

Aufgabe 1. Sei $L_G = \{\underline{e}, \circ, ^{-1}\}$ die Gruppen-Sprache, wobei $\underline{e}$ ein Konstantenzeichen, $\circ$ ein zweistelliges Funktionszeichen, und $^{-1}$ ein einstelliges Funktionszeichen ist. Schreiben Sie eine L_G-Formel[1] φ, sodass für jede L_G-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: für alle Belegungen β in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ genau dann wenn diese Struktur

(1) eine Gruppe,
(2) eine kommutative Gruppe,
(3) eine Gruppe mit 3 Elementen

ist.

Aufgabe 2. Sei $L_{Gr} = \{E\}$ die Graphen-Sprache und $\mathfrak{A}$ der unten angegebene Graph. Finden Sie Belegungen β, γ sodass $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$ und $\mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma]$, wobei $\psi = \exists y \exists z((Exy \wedge Exz) \wedge \neg Eyz)$. Beweisen Sie, dass ein Graph $\mathfrak{B}$, für den $\mathfrak{B} \models \psi[\beta]$ für alle Belegungen gilt, mindestens 4 Elemente enthalten muss.



Aufgabe 3. Definieren Sie eine Sprache L, für die alle folgenden Wörter L-Terme wären, wenn es so eine überhaupt gibt:

(1) $f v_0 v_7 \underline{3}$
(2) $^{-1} f h_1 v_1 h_2 v_{2015} \underline{a}\, \underline{b} v_3$
(3) $h_1 \underline{0} v_8$
(4) $h_2 v_0 f v_0 v_9 \underline{1}$

Aufgabe 4. Sei L eine Sprache. Beweisen Sie, dass kein L-Term ein echtes Anfangssegment eines anderen L-Termes ist.

[1]Schreiben Sie diese Formeln einmal ganz formell, und dann noch auf eine "übliche" Art und Weise, d.h., $(x \circ y)$ statt $\circ xy$ usw..

Übungsblatt 1. 11.03.2015

Aufgabe 1. Stellen Sie fest[4], welche von den folgenden Zeichenketten Formeln sind:

(1) $((\varphi \wedge \psi) \wedge (\neg\theta))$;
(2) $(\varphi \wedge \psi \wedge \neg\theta)$;
(3) $(\varphi \wedge (\psi \wedge \neg\theta)$;
(4) $(\varphi \wedge (\neg\psi \wedge \theta))$

Aufgabe 2. (1) Beweisen Sie durch Induktion über den Aufbau einer Formel φ, dass die Anzahlen der Vorkommen der Zeichen "(" und ")" in φ gleich sind.
(2) Beweisen Sie durch Induktion über den Aufbau der Formeln, dass in einer Formel keine zwei Variablen nebeneinander stehen können.

Aufgabe 3. Sei β eine Belegung mit $\beta(X_n) = 1$ genau dann, wenn n eine gerade Zahl ist. Bestimmen Sie, ob $\beta \vDash \varphi$, wobei φ is

(1) $(\neg(\neg X_{2014} \vee X_{2015}) \to \neg X_{2016}) \to (X_{2014} \to (\neg X_{2015} \to \neg X_{2016}))$;
(2) $(X_0 \to (\neg X_1 \vee X_{10}))$;
(3) $((\neg X_{15} \wedge X_{16}) \vee (\neg X_{16} \wedge X_{17}))$.

Aufgabe 4. Joanna isst nur Pizzas mit Salami oder Schinken, Peter will unbedingt Schinken oder Pilze, Anna kann nicht Salami, Paradeiser, und Pilze gleichzeitig vertragen, und Stefan will nicht Schinken zusammen mit Paradeiser essen. Gibt es eine Pizza, die für alle passt? Wenn ja, dann muss solche Pizza unbedingt entweder Salami oder Paradeiser enthalten?

Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic, University of Vienna, Währinger Strasse 25, A-1090 Wien, Austria.
E-mail address: `lzdomsky@gmail.com`
URL: `http://www.logic.univie.ac.at/~lzdomsky/`

[4]In diesem Übungsblatt soll die Definition der Formel ganz exakt verwendet werden. Nachher werden wir diese etwas löckern, besonders was die Verwendung von Klammern angeht.