Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 1

Wir betrachten Registermaschinen über dem Alphabet $\{|\}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Geben Sie eine Registermaschine $\mathcal{M}$ an, die die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(m,n) = m + n$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$ berechnet.

Hinweis: Geben Sie zuerst ein Flußdiagramm von $\mathcal{M}$ an und definieren Sie dann $\mathcal{M}$ (als eine Folge von Befehlen).

(b) Geben Sie das Flußdiagramm einer Registermaschine an, die die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(m,n) = m \cdot n$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$ berechnet.

Hinweis: Sie dürfen im Diagramm eine Kopiermaschine $\mathcal{K}_h^{r,s}$ verwenden.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Die Menge der rekursiven Funktionen ist die kleinste Menge totaler Funktionen, die die Grundfunktionen enthält und abgeschlossen ist unter Einsetzung (Komposition), unter primitiver Rekursion und unter μ-Rekursion.

(a) Definieren sie analog die Menge der "partiell rekursiven" Funktionen als die kleinste Menge partieller Funktionen, die die Grundfunktionen enthält und abgeschlossen ist unter Einsetzung (Komposition), unter "partieller primitiver Rekursion" und unter "partieller μ-Rekursion". D.h.: geben Sie Definitionen dieser drei Abschlusseigenschaften für Mengen partieller Funktionen.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{M}$ eine Registermaschine, so berechnet $\mathcal{M}$ eine partielle Funktion $f^n_{\mathcal{M}}$ von $\mathbb{N}^n$ nach $\mathbb{N}$. Eine partielle Funktion f heisst *partiell maschinenberechenbar* genau dann, wenn es $\mathcal{M}, n$ gibt, so daß $f = f^n_{\mathcal{M}}$.

Zeigen Sie:

(b1) Jede partiell maschinenberechenbare Funktion ist partiell rekursiv.
Hinweis: Kleenesche Normalform.

(b2) Die Menge der partiell maschinenberechenbaren Funktionen ist abgeschlossen unter partieller primitiver Rekursion.
Hinweis: Es genüge, ein geeignetes Flußdiagramm anzugeben.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Seien f, g aus Kleenes Prädikat T_1 durch partielle μ-Rekursion wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f(n) &:= (\mu m. T_1(n,n,m))_0 + 1, \\ g(n) &:= (\mu m. T_1(n,n,m))_0 \dot{-} (\mu m. T_1(n,n,m))_0 \end{aligned}$$

Ist f total? Ist g total?

Abgabe am Mittwoch, den 16. Oktober, in und vor der Vorlesung.