Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 11

Arbeiten Sie in ZF.

Aufgabe 1 (2 Punkte) Seien x, y Mengen mit $x \cap y = \emptyset$ und f eine Injektion von x nach y und g eine Injektion von y nach x. Setze $R := f^{-1} \cup g^{-1}$. Es heiße $u \in x$ *ungerade*, wenn es ein ungerades $\ell \in \omega$ gibt, so daß zwar ein bei u beginnender R-Pfad der Länge ℓ existiert, aber kein solcher Pfad der Länge $\ell + 1$ existiert.

Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned}&\{(g(v), v) \in x \times y \mid g(v) \text{ ist ungerade}\}\\ &\cup \{(u, f(u)) \in x \times y \mid u \text{ ist nicht ungerade}\}.\end{aligned}$$

eine Bijektion von x auf y ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte) Eine Funktion $F : ON \to ON$ heißt *normal*, wenn

- (strikt monoton) $F(\alpha) < F(\beta)$ für alle $\alpha < \beta \in ON$;
- (stetig) $F(\lambda) = \sup_{\beta<\lambda} F(\beta)$ für jede Limesordinalzahl $\lambda \in ON$.

Ein *F-Fixpunkt* ist eine Ordinalzahl $\beta \in ON$, so daß $F(\beta) = \beta$. Zeigen Sie:

(a) für alle $\alpha \in ON$ gibt es einen F-Fixpunkt $\beta \geq \alpha$;

(b) wenn x eine Menge von F-Fixpunkten ist, so ist $\bigcup x$ ein F-Fixpunkt.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Sei x eine wohlordenbare Menge. Zeigen Sie:

$$|x^{<\omega}| = |x|.$$

Hinweis: Definieren Sie per Rekursion eine Funktion f auf ω, so daß $f(n)$ eine Injektion von x^n nach x ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Sei x eine wohlordenbare Menge und $\mathcal{H}$ das *Hartogsche Aleph* aus Aufgabe 3, Blatt 9. Zeigen Sie, daß $\mathcal{H}(x) = |x|^+$.

Abgabe am Mittwoch, den 22. Januar, in und vor der Vorlesung.