Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 12

Arbeiten Sie in ZF.

Aufgabe 1 (2 Punkte) Lösen Sie Kunen, Exercise I.12.17, Seite 72.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Zeigen Sie, daß AC äquivalent ist zu der Aussage:

> Für jede unendliche Menge x gibt es eine Bijektion von $x \times x$ auf x.

Hinweis: Für die Rückrichtung zeigen Sie $x \preceq \mathcal{H}(x) \times \mathcal{H}(x)$ für jede unendliche Menge x. Nehmen Sie dazu an, daß $x \cap \mathcal{H}(x) = \emptyset$ und betrachten Sie eine Bijektion von $(x \cup \mathcal{H}(x)) \times (x \cup \mathcal{H}(x))$ auf $x \cup \mathcal{H}(x)$. Hierbei ist $\mathcal{H}(x)$ das Hartogsche Aleph aus Blatt 9, Aufgabe 3.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Sei α eine Limesordinalzahl. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{cf}(\alpha)$ ist die kleinste Ordinalzahl β, so daß es eine normale Funktion $f : \beta \to \alpha$ gibt mit $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$ (siehe Blatt 11, Aufgabe 2).

(b) $\mathrm{cf}(\alpha)$ ist die kleinste Ordinalzahl β, so daß es eine strikt monotone Funktion $f : \beta \to \alpha$ gibt mit $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$.

(c) $\mathrm{cf}(\alpha)$ ist die kleinste Ordinalzahl β, so daß es eine Funktion $f : \beta \to \alpha$ gibt mit $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Beweisen Sie Kunen, Lemma I.13.10, Seite 74 in ZFC.

Abgabe am Mittwoch, den 29. Januar, in und vor der Vorlesung.