Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (2 Punkte) Sei L eine Sprache. Zeigen Sie, daß für alle L-Formeln φ, ψ und alle Variablen x gilt: wenn $(\varphi \to \psi)$ beweisbar ist und x nicht frei in φ vorkommt, dann ist auch $(\varphi \to \forall x \psi)$ beweisbar.

Aufgabe 2 (2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

> Für jede Sprache L, jede L-Struktur $\mathfrak{A}$, jede Belegung β der Variablen in A und alle L-Formeln φ, ψ gilt: wenn die Variable x nicht frei in ψ vorkommt und wenn $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[\beta]$, dann $\mathfrak{A} \models (\exists x \varphi \to \psi)[\beta]$.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Sei L eine Sprache. Eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ ist *Substruktur* einer L-Struktur $\mathfrak{B}$, symbolisch $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, wenn $A \subseteq B$ und für alle $r \geq 1$ gilt:

(i) für alle r-stelligen Relationssymbole $R \in L$ ist $R^{\mathfrak{B}} \cap A^r = R^{\mathfrak{A}}$;

(ii) für alle r-stelligen Funktionssymbole $f \in L$ ist $f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright_{A^r} = f^{\mathfrak{A}}$;

(iii) für alle Konstanten(symbole) $c \in L$ ist $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$.

Eine L-Aussage φ ist *universell*, wenn $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_k \psi$ für Variablen $x_1, \ldots, x_k$ und eine L-Formel ψ, in der keine Quantoren vorkommen.

Gelte $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeigen Sie, daß jede universelle L-Aussage, die in $\mathfrak{B}$ gilt, auch in $\mathfrak{A}$ gilt.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Sei L eine Sprache und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen. Ein *Homomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ is eine Abbildung $h : A \to B$, so daß für alle $r \geq 1$, alle $(a_1, \ldots, a_r) \in A^r$ und alle r-stelligen Relationssymbole $R \in L$ und Funktionssymbole $f \in L$ und alle Konstanten $c \in L$ gilt:

(i) wenn $(a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}}$, so $(h(a_1), \ldots, h(a_r)) \in R^{\mathfrak{B}}$;

(ii) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_r)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_r))$;

(iii) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Eine L-Formel φ ist *positiv existentiell*, wenn sie aus Primformeln mittels $\wedge, \vee$ und existentieller Quantifikation $\exists x$ gebildet werden kann.

Sei h ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Zeigen Sie, daß für alle positiv existentiellen L-Formeln φ und alle Belegungen β der Variablen in A gilt:

$$\text{wenn } \mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \text{ , so } \mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta].$$

Abgabe am Mittwoch, den 23. Oktober, in und vor der Vorlesung.