Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Großes Übungsblatt 3

Eine L-*Theorie* für eine Sprache L ist eine Menge von L-Aussagen.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei L eine Sprache. Eine Menge von Formeln T heißt *deduktiv abgeschlossen* wenn T jede aus T beweisbare L-Formel enthält. Sei $Term_L$ die Menge der L-Terme. Dann definiert

$$t \sim t' \iff t \doteq t' \in T$$

eine Äquivalenzrelation auf $Term_L$. Für $t \in Term_L$ bezeichne

$$[t] := \{t' \in Term_L \mid t \sim t'\}$$

die Äquivalenzklasse von t.

Wir definieren eine L-Struktur $\mathfrak{T}(T)$ mit Universum $\{[t] \mid t \in Term_L\}$ wie folgt. Für jedes $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ und jedes r-stellige Relationssymbol $R \in L$ und jedes r-stellige Funktionssymbol $f \in L$ und jede Konstante $c \in L$ gelte für alle $t_1, \ldots, t_r \in Term_L$

$$\begin{aligned} ([t_1], \ldots, [t_r]) \in R^{\mathfrak{T}(T)} &\iff Rt_1 \cdots t_r \in T; \\ f^{\mathfrak{T}(T)}([t_1], \ldots, [t_r]) &:= [ft_1 \cdots t_r]; \\ c^{\mathfrak{T}(T)} &:= [c]. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathfrak{T}(T)$ wohldefiniert. Sei β die Belegung in $\mathfrak{T}(T)$, so daß $\beta(x) = [x]$ für jede Variable x. Zeigen Sie:

1. Für jedes $t \in Term_L$ gilt: $t^{\mathfrak{T}(T)}[\beta] = [t]$.
2. Für jede Primformel φ gilt: $\mathfrak{T}(T) \models \varphi[\beta] \iff \varphi \in T$.
3. Sei $\varphi \in T$ eine L-Aussage der Gestalt $\forall x_1 \cdots x_r((\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_\ell) \rightarrow \varphi_{\ell+1})$ wobei für jedes $i \leq \ell+1$ die Formel $\varphi_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_r)$ eine Primformel ist. Dann gilt $\mathfrak{T}(T) \models \varphi$.
4. Sei jetzt T die Menge der $\{^{-1}, e, \circ\}$-Formeln die aus den Gruppenaxiomen beweisbar sind. Dann ist $\mathfrak{T}(T)$ eine Gruppe.

Aufgabe 2 (2 Punkte) Sei $L = \{<\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol $<$. Eine lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ heißt *Wohlordnung*, wenn es für jede nicht leere Teilmenge X von A ein $a \in X$ gibt, so daß $a <^{\mathfrak{A}} b$ (genauer: $(a, b) \in <^{\mathfrak{A}}$) für alle $b \in X \setminus \{a\}$.

1. Zeigen Sie, daß eine lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ genau dann eine Wohlordnung ist, wenn es keine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß $a_{i+1} <^{\mathfrak{A}} a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
2. Sei *WO* die Klasse aller Wohlordnungen. Zeigen Sie, daß es keine L-Theorie T gibt, so daß $WO = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models T\}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Sei L eine abzählbare Sprache und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ L-Strukturen. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine *elementare Substruktur von* $\mathfrak{B}$, symbolisch $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist und für alle L-Formeln φ und Belegungen β in $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\beta].$$

Zeigen Sie, daß jede unendliche L-Struktur $\mathfrak{B}$ eine abzählbare elementare Substruktur hat.

Hinweis: Konstruieren Sie eine abzählbare Menge $B_0 \subseteq B$, die für jede L-Formel $\varphi(\bar{x}, y)$ und jedes Tupel $\bar{b}$ aus B_0 ein b mit $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, b)$ enthält, falls es ein solches b gibt.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Sei L eine Sprache und $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Für jedes $a \in A$ sei injektiv eine neue Konstante $c_a \notin L$ gewählt. Dann bezeichnet $\mathfrak{A}_A$ die $(L \cup \{c_a \mid a \in A\})$-Struktur mit Universum A, die jedes Symbol aus L so wie $\mathfrak{A}$ interpretiert und jede neue Konstante c_a durch a interpretiert. Die Menge $\{\varphi \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi\}$ der $(L \cup \{c_a \mid a \in A\})$-Aussagen, die in $\mathfrak{A}_A$ gelten, heißt *elementares Diagramm von* $\mathfrak{A}$.

Sei T eine beliebige L-Theorie und $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Es gibt eine L-Struktur $\mathfrak{B}$, so daß $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \models T$.

(ii) Die Vereinigung von T und dem elementaren Diagramm von $\mathfrak{A}$ ist konsistent.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ und $\mathfrak{K}$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{R}$, d.h. $\mathfrak{R} \preceq \mathfrak{K}$. Ein Element $a \in K$ heißt *endlich*, wenn es $r \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $-r \leq^{\mathfrak{K}} a \leq^{\mathfrak{K}} r$, und *infinitesimal*, wenn für alle positiven $r \in \mathbb{R}$ gilt, daß $-r \leq^{\mathfrak{K}} a \leq^{\mathfrak{K}} r$. Es bezeichne I die Menge der infinitesimalen Elemente von $\mathfrak{K}$, und E die Menge der endlichen Elemente von $\mathfrak{K}$.

1. Zeigen Sie, daß es $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{R} \preceq \mathfrak{K}$ gibt, so daß die Mengen I und $K \setminus E$ unendlich sind.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4, um ein $\mathfrak{R} \preceq \mathfrak{K}$ mit $K \setminus E \neq \emptyset$ zu finden.

2. Zeigen Sie, daß E abgeschlossen ist unter $+^{\mathfrak{K}}, \cdot^{\mathfrak{K}}, -^{\mathfrak{K}}$; für $a \in K$ is dabei $-^{\mathfrak{K}}a$ das Inverse von a bezüglich $+^{\mathfrak{K}}$. Zusammen mit den Operationen aus $\mathfrak{K}$ bildet E also einen Ring $\mathfrak{E}$ (kommutativ, mit Eins).

3. Zeigen Sie, daß I ein maximales Ideal in $\mathfrak{E}$ ist.

4. Für $a \in E$ sei $st : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

   $$st(a) := \inf\{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r\}.$$

   Zeigen Sie, daß st ein Ringhomomorphismus mit Kern I ist und

   $$\mathfrak{E}/I \cong (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1).$$

Abgabe am Mittwoch, den 6. November, in und vor der Vorlesung.