Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (2 Punkte) Sei L eine Sprache, T eine Menge von universellen L-Aussagen (siehe Blatt 2, Aufgabe 3) und $\varphi(x, y)$ eine quantorenfreie L-Formel. Es gelte

$$T \vdash \forall x \exists y \; \varphi(x, y).$$

Zeigen Sie, daß es $n \geq 1$ und L-Terme $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ gibt, so daß

$$T \vdash \forall x \; \big(\varphi(x, t_1(x)) \vee \ldots \vee \varphi(x, t_n(x))\big).$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß falls die Konklusion falsch ist, dann die Theorie

$$T \cup \{\neg\varphi(c, t) \mid t \text{ ist ein } L \cup \{c\}\text{-Term ohne freie Variable}\}$$

konsistent ist. Hierbei ist c eine "neue" Konstante.

Aufgabe 2 (2 Punkte) Sei L eine Sprache. Eine L-Formel ist in *pränexer Normalform* genau dann, wenn sie die Gestalt

$$Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k \; \psi$$

hat, wobei $Q_1, \ldots, Q_k \in \{\exists, \forall\}$ Quantoren sind, $x_1, \ldots, x_k$ Variablen sind und ψ eine quantorenfreie L-Formel ist.

Zeigen Sie, daß jede L-Formel φ zu einer Formel in pränexer Normalform logisch äquivalent ist.

Hinweis: Argumentieren Sie per Induktion über φ. Verwenden Sie, daß die L-Formeln $(Qx\varphi \wedge \psi)$ und $Qx(\varphi \wedge \psi\frac{y}{x})$ logisch äquivalent sind, wobei Q ein Quantor und y eine "neue" Variable ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Sei $L_N := \{0, S, +, \cdot, <\}$ die Sprache der Arithmetik. Eine Σ_1-Formel heißt *strikt*, wenn sie die Gestalt

$$\exists x_1 \ldots \exists x_\ell \; \psi$$

hat für ein $\ell \in \mathbb{N}$, Variable $x_1, \ldots, x_\ell$ und eine L_N-Formel ψ, die nur beschränkte Quantoren enthält.

Zeigen Sie, daß es für jede Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine strikte Σ_1-Formel $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ gibt, so daß $\mathfrak{N} \models \forall x_1 \cdots \forall x_k(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Sei $\mathfrak{A}$ eine L_N-Struktur und $\mathfrak{B}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$, so daß für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt: wenn $a <^{\mathfrak{A}} b$, so $a \in B$.

Zeigen Sie, daß für jede strikte Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ und alle $b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt: wenn $\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k)$, so $\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k)$.

Abgabe am Mittwoch, den 13. November, in und vor der Vorlesung.