Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 5

Für $\ell \in \mathbb{N}$ seien Σ_ℓ und Π_ℓ die wie folgt definierten Mengen von L_N-Formeln:

- eine L_N-Formel ist in $\Sigma_0 = \Pi_0$, wenn sie aus Primformeln durch Anwenden von $\wedge, \vee, \neg, \exists x < t$ und $\forall x < t$ entsteht;
- eine L_N-Formel ist in $\Sigma_{\ell+1}$, wenn sie aus Formeln in $\Pi_\ell \cup \Sigma_\ell$ durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists x$ und $\forall x < t$ entsteht;
- eine L_N-Formel ist in $\Pi_{\ell+1}$, wenn sie aus Formeln in $\Pi_\ell \cup \Sigma_\ell$ durch Anwenden von $\wedge, \vee, \forall x$ und $\exists x < t$ entsteht;

Hier sei verstanden, daß in $\exists x < t$ und $\forall x < t$ die Variable x nicht im L_N-Term t vorkommt.

Aufgabe 1 (3 Punkte) Sei T die L_N-Theorie, die alle in $\mathfrak{N}$ wahren Π_1-Aussagen enthält, und ausserdem das Induktionsschema für Σ_0-Formeln enthält, d.h. für jede Σ_0-Formel $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ die Aussage

$$\forall y_1 \cdots \forall y_k \big(\ (\varphi(0, y_1, \ldots, y_k) \ \wedge \ \forall x(\varphi(x, y_1, \ldots, y_k) \to \varphi(x+1, y_1, \ldots, y_k))) \\ \to \forall x \varphi(x, y_1, \ldots, y_k) \ \big)$$

Sei $\mathfrak{A} \models T$ und $\mathfrak{B}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$, so daß für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt: wenn $a <^{\mathfrak{A}} b$, so $a \in B$ (siehe Blatt 4, Aufgabe 4).

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{B} \models T$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß Blatt 4, Aufgabe 4 auch für allgemeine (nicht notwendigerweise strikte) Σ_1-Formeln gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei T die Theorie aus der vorigen Aufgabe und sei $\varphi(x, y) \in \Sigma_1$, so daß

$$T \vdash \forall x \exists y \ \varphi(x, y).$$

Zeigen Sie, daß es einen L_N-Term $t(x)$ gibt, so daß

$$T \vdash \forall x \exists y < t(x) \ \varphi(x, y).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Theorie

$$T \cup \{\forall y < t(c)\ \neg\varphi(c,y) \mid t(x) \in \mathit{Term}_{L_N}\}$$

für eine "neue" Konstante c, und argumentieren Sie so ähnlich wie für Blatt 4, Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Sei jetzt T eine beliebige L_N-Theorie und $\psi(x,y)$ eine Σ_1-Formel, so daß $T \vdash \forall x \exists! y\ \psi(x,y)$. Sei $f \notin L_N$ ein einstelliges Funktionssymbol und betrachte die $(L_N \cup \{f\})$-Theorie

$$T(f) := T \cup \big\{\forall x\ \psi(f(x),x)\big\}.$$

Für $\ell \in \mathbb{N}$ definieren wir $\Sigma_\ell(f)$ und $\Pi_\ell(f)$ so wie oben Σ_ℓ und Π_ℓ, aber in der Sprache $L_N \cup \{f\}$ statt L_N.

Zeigen Sie, daß es für jedes $\ell \geq 1$ eine Abbildung $\varphi \mapsto \varphi'$ von $\Sigma_\ell(f)$ nach Σ_ℓ gibt, so daß für alle $\varphi \in \Sigma_\ell(f)$

$$T(f) \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi').$$

Hinweis: Finden Sie zuerst geeignete Abbildungen $\varphi \mapsto \varphi'$ und $\varphi \mapsto \varphi''$, die jeder $\Sigma_0(f)$-Formel φ eine Σ_1-Formel φ' beziehungsweise eine Π_1-Formel φ'' zuordnen. Verfahren Sie dann per Induktion über ℓ, indem Sie gleichzeitig eine analoge Aussage für $\Pi_\ell(f)$ beweisen.

Abgabe am Mittwoch, den 20. November, in und vor der Vorlesung.