Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 6

Im Folgenden sei T eine rekursiv aufzählbare L_N-Theorie, die die Peanoarithmetik P enthält. Desweiteren sei $B_T(x,y)$ eine Δ_1^{P}-Formel, so daß für alle L_N-Aussagen ψ gilt:

$$T \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \exists x B_T(x, \Delta_{\ulcorner\psi\urcorner}).$$

Schreibe $Bew_T(y)$ für $\exists x B_T(x,y)$. Es gelte für alle L_N-Aussagen ψ, χ:

$$T \vdash (Bew_T(\Delta_{\ulcorner\psi\urcorner}) \wedge Bew_T(\Delta_{\ulcorner\chi\urcorner})) \to Bew_T(\Delta_{\ulcorner\psi\wedge\chi\urcorner}).$$

Achtung: es wird *nicht* vorausgesetzt, daß $\mathfrak{N} \models T$.

Aufgabe 1 (2 Punkte) Zeigen Sie, daß für alle L_N-Aussagen φ gilt:

$T \vdash \varphi$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $T \vdash B_T(\Delta_n, \Delta_{\ulcorner\varphi\urcorner})$.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Sei γ eine L_N-Aussage, so daß

$$Q \vdash \gamma \leftrightarrow \neg Bew_T(\Delta_{\ulcorner\gamma\urcorner}).$$

Zeigen Sie:

(a) Wenn T konsistent ist, dann $T \nvdash \gamma$.

(b) Wenn T ω-konsistent ist, dann $T \nvdash \neg\gamma$.

Daß T *ω-konsistent* ist, bedeutet: es gibt keine L_N-Formel $\varphi(x)$, so daß $T \vdash \exists x \varphi(x)$ und $T \vdash \neg\varphi(\Delta_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei ρ eine L_N-Aussage, so daß

$$Q \vdash \rho \leftrightarrow \forall x \big(B_T(x, \Delta_{\ulcorner\rho\urcorner}) \to \exists y < x \; B_T(y, \Delta_{\ulcorner\neg\rho\urcorner})\big).$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine solche L_N-Aussage ρ.

(b) Wenn T konsistent ist, dann gilt weder $T \vdash \rho$ noch $T \vdash \neg\rho$.

Abgabe am Mittwoch, den 27. November, in und vor der Vorlesung.