Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte) Für Mengen x, y definiere

$$\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Zeigen Sie, daß für alle Mengen w, x, y, z gilt:

(a) $\langle w, x\rangle = \langle y, z\rangle$ genau dann, wenn $w = y$ und $x = z$;

(b) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$;

(c) die Klasse $(x \times y) := \{u : \exists a \in x \exists b \in y\ u = \langle a, b\rangle\}$ ist eine Menge.

Hinweis: Potenzmengenaxiom.

(d) Für welche Mengen x, y gilt $\bigcup\bigcup(x \times y) = x \cup y$?

Aufgabe 2 (2 Punkte) Gibt es $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und Mengen $x_1, \dots, x_n$, so daß

$$x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_1 \qquad ?$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Sei x eine nicht leere Menge, die *transitiv* ist, d.h. $\bigcup x \subseteq x$. Definieren Sie eine $\{\in\}$-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Universum x, die "$\in$ durch $\in$ interpretiert". Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A}$ das Extensionalitätsaxiom erfüllt. Zeigen Sie ausserdem, daß hierbei auf die Voraussetzung der Transitivität von x im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie: die Existenz einer dreielementigen Menge ist nicht beweisbar in der Theorie, die aus dem Extensionalitätsaxiom, dem Fundierungsaxiom, dem Komprehensionsschema und dem Paaraxiom besteht.

Abgabe am Mittwoch, den 4. Dezember, in und vor der Vorlesung.