Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (2 Punkte) Wir nehmen an, daß ZF konsistent ist. Zeigen Sie: es gibt ein Modell $\mathfrak{A} = (A, \in^{\mathfrak{A}})$ von ZF, so daß es ein nicht leeres $B \subseteq A$ gibt, so daß B kein $\in^{\mathfrak{A}}$-minimales Element hat, d.h. so daß: für alle $b \in B$ gibt es $b' \in B$ mit $b' \in^{\mathfrak{A}} b$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen. Sei $bit \colon \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ die Funktion, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n = \sum_{i=0}^{\lceil \log(n+1) \rceil} bit(i, n) \cdot 2^i.$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$ schreibe $m \in^{\mathbb{N}} n$ für $bit(m, n) = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ sagen wir, n *kodiere* die Menge

$$set(n) := \{set(m) \mid m \in^{\mathbb{N}} n\}.$$

(a) Welches $n \in \mathbb{N}$ kodiert die Menge $S(S(S(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?

(b) Zeigen Sie, daß eine Menge x genau dann von einem $n \in \mathbb{N}$ kodiert wird, wenn $x \in X_\infty$. Hierbei ist $X_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und X_n rekursiv definiert durch $X_0 := \emptyset, X_{n+1} := X_n \cup \mathcal{P}(X_n)$.

(c) Zeigen Sie, daß das Unendlichkeitsaxiom in $(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}})$ falsch ist, daß aber alle anderen Axiome von ZF in $(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}})$ wahr sind.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Arbeiten Sie in ZF. Zeigen Sie, daß es für alle Mengen x, y, z eine Bijektion von $(x^y)^z$ auf $x^{y \times z}$ gibt.

Abgabe am Mittwoch, den 11. Dezember, in und vor der Vorlesung.