Wintersemester 2013, Einführung in die mathematische Logik

Übungsblatt 9

Arbeiten Sie in ZF.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei $R \subseteq \omega \times \omega$. Für alle $i \in \omega \setminus \{0\}$ gebe es genau einen R-Pfad von 0 nach i. Ausserdem sei für alle $i \in \omega$ die Menge $\{j \in \omega : iRj\}$ endlich.

Zeigen Sie, daß es eine Funktion $f : \omega \to \omega$ gibt, so daß $f(0) = 0$ und für alle $i \in \omega$ gilt $f(i)Rf(i+1)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

(b) Seien $\alpha, \delta \in ON$. Zeigen Sie, daß es genau eine Funktion $f : \delta \to ON$ gibt, so daß $f(0) = 1$ und für alle $\beta < \delta$ gilt $f(\beta + 1) = f(\beta) \cdot \alpha$ und, falls β eine Limesordinalzahl ist, so $f(\beta) = \sup_{\gamma<\beta} f(\gamma)$.

(c) Wir schreiben α^β für $f(\beta)$. Zeigen Sie, daß für alle $\beta, \gamma \in \delta$ mit $\beta+\gamma < \delta$ gilt:
$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Für eine Menge x sei
$$\mathcal{H}(x) := \{\alpha : \alpha \preceq x\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}(x)$ ist eine Menge.

Hinweis: zeigen Sie, daß es eine Injektion von $\mathcal{H}(x)$ in die Menge aller (y, r) gibt, so daß $y \subseteq x$ und r eine Wohlordnung auf y ist.

(b) $\mathcal{H}(x)$ ist eine Ordinalzahl.

(c) $\mathcal{H}(x) \not\preceq \alpha$ für alle $\alpha < \mathcal{H}(x)$.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Sei X eine nicht leere Klasse. Zeigen Sie, daß es $x \in X$ gibt mit $x \cap X = \emptyset$.

Hinweis: betrachten Sie die Menge $\mathrm{trcl}(y)$ für ein $y \in X$ und verwenden Sie das Fundierungsaxiom.

Abgabe am Mittwoch, den 8. Januar, in und vor der Vorlesung.