Sommersemester 2012, Grundbegriffe der mathematischen Logik

Übungsblatt 10

Sei σ eine Signatur und seien M und N σ-Strukturen. Ein *Isomorphismus* von M nach N ist eine Bijektion $H : \underline{M} \to \underline{N}$, die mit den Operationen vertauscht (siehe Vorlesung, Definition 2.3), und so daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma^{\mathrm{Rel}}$ und jedes k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in \underline{M}^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^M \iff (H(a_1), \ldots, H(a_k)) \in R^N.$$

M und N sind *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus von M nach N gibt.

Aufgabe 1 Sei T eine σ-Theorie, die ein unendliches Modell besitzt, und sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, daß es ein Modell M von T gibt, so daß eine Injektion von X nach $\underline{M}$ existiert. Folgern Sie, daß jede widerspruchsfreie σ-Theorie zwei nicht isomorphe Modelle hat.

Hinweis: Kompaktheitssatz und Satz von Löwenheim-Skolem.

Aufgabe 2 Sei φ ein σ-Satz, so daß es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Modell M von φ gibt mit $|\underline{M}| > n$. Zeigen Sie, daß φ ein unendliches Modell hat.

Seien M und N σ-Strukturen. M und N sind *elementar äquivalent*, wenn für alle σ-Sätze φ gilt:

$$M \models \varphi \iff N \models \varphi.$$

Aufgabe 3 Sei T eine widerspruchsfreie σ-Theorie, die jeden σ-Satz enthält, den sie beweist. Zeigen Sie, daß T genau dann vollständig ist, wenn je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4 Sei R die Struktur $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ und sei $x \in \mathbb{X}$. Zeigen Sie, daß es eine zu R elementar äquivalente Struktur R^* gibt, so daß es ein $a \in \underline{R^*}$ gibt, so daß für jede Belegung β in R^* mit $\beta(x) = a$ gilt:

$$\hat{\beta}(< \underbrace{+ + \cdots +}_{n-1 \text{ Mal}} \underbrace{1 1 \cdots 1}_{n \text{ Mal}} x) = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Hinweis: Kompaktheitssatz.