Sommersemester 2012, Grundbegriffe der mathematischen Logik

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Seien $n \geq 1$ und $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$. Sei p eine Primzahl, die echt größer ist als $x_0, \ldots, x_n, n+1$. Weiter sei

$$t = \sum_{i=0}^{n} ((i+1)p^{2i} + x_i p^{2i+1}).$$

Zeigen Sie, daß für alle $i \leq n$ und alle $y \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} y = x_i \quad \Longleftrightarrow \quad & \text{es gibt } b_0, b_1, b_2, z \in \mathbb{N} : \\ & t = b_0 + b_1((i+1) + yp + b_2 p^2) && (1) \\ & y < p && (2) \\ & b_0 < b_1 && (3) \\ & b_1 = p^{2z} && (4) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend (das heißt, für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$). Sei $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die durch

$$f^{-1}(x) = \max\{y \in \mathbb{N} \mid f(y) \leq x\}.$$

gegebene Funktion; hierbei sei $\max \emptyset = 0$. Zeigen Sie:

(a) f^{-1} ist wohldefiniert.

(b) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $f(f^{-1}(x)) \leq \max\{x, f(0)\}$.

(c) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $f^{-1}(f(x)) = x$.

Proposition 1.6 im Skript definiert primitiv rekursive Funktionen

$$\mathrm{not}, \mathrm{sgn}, \mathrm{lt}, \mathrm{gt}, \mathrm{eq}, \mathrm{min}, \mathrm{max}.$$

Aufgabe 3 Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend und primitiv rekursiv. Betrachten Sie die Orakelsignatur

$$\{\texttt{Zero}, \texttt{Val}, \texttt{Inc}, \texttt{Dec}, \texttt{F}, \texttt{Not}, \texttt{Sgn}, \texttt{Lt}, \texttt{Gt}, \texttt{Eq}, \texttt{Min}, \texttt{Max}\},$$

wobei `Zero` nullstellig ist, $\texttt{Lt}, \texttt{Gt}, \texttt{Eq}, \texttt{Min}, \texttt{Max}$ zweistellig sind, und alle anderen Orakelnamen einstellig sind.

Schreiben Sie ein LOOP-Orakelprogramm dieser Orakelsignatur, das f^{-1} berechnet, wobei die Interpretation jedes Orakelnamens, die durch die Notation nahelegte sei.

Aufgabe 4 (Übungsaufgabe 1.14 im Skript) Geben Sie eine Tabelle der exakten Werte von $2 \uparrow^{n-2} x$ an für alle Paare $(n, x) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, 10\}$, für die das praktikabel ist. Erweitern Sie die Tabelle, indem Sie, soweit praktikabel, für große Funktionswerte die Zahl der Dezimalstellen grob abschätzen ($2^{10} = 1024 \approx 10^3$).