Sommersemester 2012, Grundbegriffe der mathematischen Logik

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Sei M eine Struktur und seien N, N' Substrukturen von M. Zeigen Sie: es existiert eine Substruktur von M, deren Grundmenge $\underline{N} \cap \underline{N'}$ ist.

Aufgabe 2 Seien M, N Strukturen derselben Signatur σ und H ein Homomorphismus von M zu N. Weiter sei β eine Belegung der Variablen in M. Dann ist natürlich $(H \circ \beta)$ eine Belegung der Variablen in N.

(a) Zeigen Sie, daß
$$H \circ \overline{\beta} = \overline{(H \circ \beta)}.$$

(b) Folgern Sie, daß für alle σ-Terme t, s gilt:

wenn $\overline{\beta}(t) = \overline{\beta}(s)$, dann $\overline{(H \circ \beta)}(t) = \overline{(H \circ \beta)}(s)$.

(c) Nehmen Sie jetzt an, daß H surjektiv ist, und zeigen dann, daß für alle σ-Terme t, s gilt:

wenn $\overline{\gamma}(t) = \overline{\gamma}(s)$ für alle Belegungen γ der Variablen in M, dann auch $\overline{\delta}(t) = \overline{\delta}(s)$ für alle Belegungen δ der Variablen in N.

Aufgabe 3 Sei M eine Struktur der Signatur σ und seien β, γ Belegungen der Variablen in M. Zeigen Sie, daß für jeden σ-Term t gilt: wenn $\beta(x) = \gamma(x)$ für jede Variable x, die in t vorkommt, dann $\overline{\beta}(t) = \overline{\gamma}(t)$.

Aufgabe 4 Gibt es eine Signatur $\sigma = (\sigma^{\mathrm{Op}}, \mathrm{ar})$, so daß t ein σ-Term ist?

(a) $t = {-}{-}{-}{-}{-}{-}{-}{-}{-}{+}\overset{1}{\mathtt{x}}$

(b) $t = {+}{+}{+}{+}{+}{+}{+}{+}{+}{-}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{7}{\mathtt{x}}$

(c) $t = {-}{+}{+}{+}$

(d) $t = {-}{+}{-}{+}$

(e) $t = {-}\overset{3}{\mathtt{x}}{-}{+}{-}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{3}{\mathtt{x}}{-}{+}{+}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}$

Aufgabe 5 Seien M, M' Strukturen derselben Signatur σ. Die σ-Struktur $M \times M'$ hat die Grundmenge $\underline{M} \times \underline{M'}$; für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes k-stellige Operationssymbol f aus σ gelte

$$f^{M \times M'}((a_1, a_1'), \ldots, (a_k, a_k')) = (f^M(a_1, \ldots, a_k), f^{M'}(a_1', \ldots, a_k')),$$

für alle $((a_1, a_1'), \ldots, (a_k, a_k')) \in (\underline{M} \times \underline{M'})^k$. Sei $p : \underline{M} \times \underline{M'} \to \underline{M}$ die durch $p(a, a') = a$ gegebene Abbildung, und sei $p' : \underline{M} \times \underline{M'} \to \underline{M'}$ die durch $p'(a, a') = a'$ gegebene Abbildung.

(a) Zeigen Sie: p ist ein Homomorphismus von $M \times M'$ zu M, und p' ist ein Homomorphismus von $M \times M'$ zu M'.

(b) Seien L eine σ-Struktur, H ein Homomorphismus von L zu M und H' ein Homomorphismus von L zu M'. Zeigen Sie: es gibt einen Homomorphismus $\tilde{H}$ von L zu $M \times M'$, so daß $H = p \circ \tilde{H}$ und $H' = p' \circ \tilde{H}$.