

Sommersemester 2012, Grundbegriffe der mathematischen Logik

Übungsblatt 4

Sei σ_{Gr} die Signatur, die nur das zweistellige Relationssymbol E enthält. Ein *Graph* ist eine σ_{Gr} -Struktur G , so daß $E^G \subseteq \underline{G}^2$ irreflexiv und symmetrisch ist (das heißt, für alle $g, g' \in \underline{G}$ gilt $(g, g) \notin E^G$ und: wenn $(g, g') \in E^G$, so $(g', g) \in E^G$).

Elemente der Grundmenge \underline{G} eines Graphen G heißen *Knoten (in G)*; ein Knoten g ist ein *Nachbar (in G)* eines Knoten g' genau dann, wenn $(g', g) \in E^G$.

Aufgabe 1 Seien $x, y \in \mathbb{X}$ zwei verschiedene Variable. Zeigen Sie: eine σ -Struktur M ist ein Graph genau dann, wenn

$$M \models \wedge \neg \exists x E x x \neg \exists x \exists y \wedge E x y \neg E y x.$$

Geben Sie einen σ -Satz φ an, so daß für alle Graphen G gilt:

$$G \models \varphi \iff \text{jeder Knoten } g \text{ in } G \text{ hat mindestens zwei Nachbarn in } G.$$

Aufgabe 2 Sei σ die leere Signatur. Geben Sie einen σ -Satz φ an, so daß für jede σ -Struktur M gilt

$$M \models \varphi \iff |\underline{M}| \leq 2,$$

und beweisen Sie das.

Aufgabe 3 Sei σ eine funktionale Signatur (also $\sigma^{\text{Rel}} = \emptyset$). Seien M und N isomorphe σ -Strukturen. Zeigen Sie, daß für jeden σ -Satz φ gilt:

$$M \models \varphi \iff N \models \varphi.$$

Hinweis: Zeigen Sie, daß für alle σ -Formeln ψ und alle Belegungen β in M gilt:

$$\hat{\beta}(\psi) = 1 \iff (\widehat{H \circ \beta})(\psi) = 1.$$

Hierbei ist H ein Isomorphismus von M auf N . Erinnern Sie sich an Aufgabe 2 von Übungsblatt 3.

Sei σ eine Signatur und seien φ und ψ σ -Sätze; ψ folgt logisch aus φ genau dann, wenn jede σ -Struktur, die Modell von φ ist, auch Modell von ψ ist; φ ist logisch allgemeingültig genau dann, wenn jede σ -Struktur ein Modell von φ ist.

Aufgabe 4 (a) Sei σ eine Signatur. Zeigen Sie, daß für alle σ -Sätze φ und ψ gilt: ψ folgt logisch aus φ genau dann, wenn

$$\neg \wedge \varphi \neg \psi$$

logisch allgemeingültig ist.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{X}$ zwei verschiedene Variable. Geben Sie eine σ_{Gr} -Formel φ mit $\text{Frei}(\varphi) = \{x, y\}$ an, so daß $\exists y \neg \exists x \neg \varphi$ nicht logisch aus $\neg \exists x \neg \exists y \varphi$ folgt, und beweisen Sie das.