**Sommersemester 2012, Grundbegriffe der mathematischen Logik**

**Übungsblatt 8**

**Aufgabe 1** Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?

(a) Wenn $A$ und $B$ rekursiv aufzählbar sind, dann auch $A \cap B$.

(b) Wenn $A$ und $B$ rekursiv aufzählbar sind, dann auch $A \cup B$.

(c) Wenn $A$ und $B$ rekursiv aufzählbar sind, dann auch $A \setminus B$.

**Aufgabe 2** Sei $A \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$ rekursiv und $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (total und) rekursiv. Zeigen Sie, daß

$$\{\bar{x} \in \mathbb{N}^k \mid \forall y < f(\bar{x})\ \exists z : (\bar{x}, y, z) \in A\}$$

rekursiv aufzählbar ist.

**Aufgabe 3** Geben Sie ein $k > 0$ und eine rekursive Menge $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ an, so daß

$$\{\bar{x} \in \mathbb{N}^k \mid \forall y : (\bar{x}, y) \in A\}$$

nicht rekursiv aufzählbar ist.

**Aufgabe 4** Eine (totale) Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist *schwach monoton*, wenn $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \leq y$. Zeigen Sie, daß eine nicht leere[1] Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ genau dann rekursiv ist, wenn sie das Bild einer schwach monotonen rekursiven Funktion ist.

**Aufgabe 5** Zeigen Sie, daß die Menge

$$\begin{aligned} \mathit{HALT} := \big\{(\mathcal{P}, x) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & \mathcal{P} \text{ codiert ein GOTO Programm, das eine} \\ & \text{partielle Funktion } f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N} \text{ berechnet,} \\ & \text{die bei } x \text{ definiert ist}\big\} \end{aligned}$$

nicht rekursiv ist.

*Hinweis:* Erinnern Sie sich an die Beweise von Proposition 2.26 und Korollar 3.25.

[1] Für die leere Menge ist die Behauptung trivialerweise falsch. Das war in der ursprünglichen Formulierung der Aufgabe fälschlicherweise nicht berücksichtigt.