

Sommersemester 2012, Grundbegriffe der mathematischen Logik

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 Sei x eine Variable.

- (a) Geben Sie eine Signatur σ und σ -Formeln φ und ψ an, so daß $\neg \wedge \varphi \neg \psi$ allgemeingültig ist, aber $\neg \wedge \exists x \varphi \neg \psi$ nicht.
- (b) Zeigen Sie, daß für jede Signatur σ und alle σ -Formeln φ und ψ , so daß x nicht in ψ vorkommt, gilt: wenn $\neg \wedge \varphi \neg \psi$ allgemeingültig ist, so auch $\neg \wedge \exists x \varphi \neg \psi$.

Aufgabe 2 Sei x eine Variable.

- (a) Geben Sie eine Signatur σ , einen σ -Term t und eine σ -Formel φ an, so daß $\neg \wedge \varphi[\frac{t}{x}] \neg \exists x \varphi$ nicht allgemeingültig ist.
- (b) Zeigen Sie, daß für jede Signatur σ , jede σ -Formel φ und jeden σ -Term t , dessen Variablen in φ nicht vorkommen, $\neg \wedge \varphi[\frac{t}{x}] \neg \exists x \varphi$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 3 Seien σ eine Signatur, φ, ψ σ -Formeln und x eine Variable, die in φ nicht vorkommt. Zeigen Sie, daß $\neg \wedge \varphi \neg \neg \exists x \neg \psi$ beweisbar ist, falls $\neg \wedge \varphi \neg \psi$ es ist.

Hinweis: Schreiben Sie $(\varphi \rightarrow \psi)$ statt $\neg \wedge \varphi \neg \psi$ und beachten Sie, daß

$$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi))$$

eine verallgemeinerte Tautologie ist.

Aufgabe 4 Sei σ eine Signatur, φ eine σ -Formel und x eine Variable. Zeigen Sie, daß $\neg \exists x \neg \varphi$ beweisbar ist, falls φ es ist.

Hinweis: Beachten Sie, daß $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ eine verallgemeinerte Tautologie und verwenden Sie Aufgabe 3.