Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 10

Aufgabe 1 Sei T eine L_N-Theorie und $\psi(x,y)$ eine Σ_1-Formel, so daß $T \vdash \forall x \exists ! y\ \psi(x,y)$. Sei $f \notin L_N$ ein einstelliges Funktionssymbol und betrachte die $(L_N \cup \{f\})$-Theorie

$$T(f) := T \cup \big\{\forall x\ \psi(f(x), x)\big\}.$$

Für $\ell \in \mathbb{N}$ definiere $\Sigma_\ell(f)$ und $\Pi_\ell(f)$ so wie Σ_ℓ und Π_ℓ (siehe Blatt 9), aber in der Sprache $L_N \cup \{f\}$ statt L_N.

Zeigen Sie, daß es für jedes $\ell \geq 1$ eine Abbildung $\varphi \mapsto \varphi'$ von $\Sigma_\ell(f)$ nach Σ_ℓ gibt, so daß für alle $\varphi \in \Sigma_\ell(f)$

$$T(f) \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi').$$

Hinweis: Finden Sie zuerst geeignete Abbildungen $\varphi \mapsto \varphi'$ und $\varphi \mapsto \varphi''$, die jeder $\Sigma_0(f)$-Formel φ eine Σ_1-Formel φ' beziehungsweise eine Π_1-Formel φ'' zuordnen. Dann folgt die Behauptung leicht per Induktion über ℓ.

Im Folgenden sei T eine L_N-Theorie, die die Peanoarithmetik P enthält, und $B_T(x,y)$ eine Δ_1^{P}-Formel (siehe Ziegler, Seite 102), so daß für alle L_N-Sätze ψ gilt:

$$T \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \exists x B_T(x, \Delta_{\ulcorner \psi \urcorner}).$$

Schreibe $Bew_T(y)$ für $\exists x B_T(x,y)$.

Achtung: es wird *nicht* vorausgesetzt, daß $\mathfrak{N} \models T$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß für alle L_N-Sätze φ gilt:

$T \vdash \varphi$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $T \vdash B_T(\Delta_n, \Delta_{\ulcorner \varphi \urcorner})$.

Aufgabe 3 (Gödel) Sei γ ein L_N-Satz, so daß

$$Q \vdash \gamma \leftrightarrow \neg Bew_T(\Delta_{\ulcorner \gamma \urcorner}).$$

Zeigen Sie:

(a) Wenn T konsistent ist, dann $T \nvdash \gamma$.

(b) Wenn T ω-konsistent ist, dann $T \nvdash \neg\gamma$.

Daß T *ω-konsistent* ist, bedeutet: es gibt keine L_N-Formel $\varphi(x)$, so daß $T \vdash \exists x \varphi(x)$ und $T \vdash \neg\varphi(\Delta_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (Rosser) Sei ρ ein L_N-Satz, so daß

$$Q \vdash \rho \leftrightarrow \forall x \big(B_T(x, \Delta_{\ulcorner \rho \urcorner}) \to \exists y < x \; B_T(y, \Delta_{\ulcorner \neg\rho \urcorner}) \big).$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen solchen L_N-Satz ρ.

(b) Wenn T konsistent ist, dann gilt weder $T \vdash \rho$ noch $T \vdash \neg\rho$.