Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 11

Aufgabe 1 Arbeiten Sie in Z. Für Mengen x, y definiere

$$\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Zeigen Sie, daß für alle Mengen w, x, y, z gilt:

(a) $\langle w, x\rangle = \langle y, z\rangle$ genau dann, wenn $w = y$ und $x = z$;

(b) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$;

(c) die Klasse $(x \times y) := \{u : \exists a \in x \exists b \in y \ u = \langle a, b\rangle\}$ ist eine Menge.

(d) Für welche Mengen x, y gilt $\bigcup\bigcup(x \times y) = x \cup y$?

Aufgabe 2 Zeigen Sie (c) obiger Aufgabe in *ZF* ohne das Potenzmengenaxiom (aber mit dem Ersetzungsschema).

Aufgabe 3 Arbeiten Sie in Z. Gibt es $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und Mengen $x_1, \ldots, x_n$, so daß

$$x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1 \qquad ?$$

Aufgabe 4 Sei $x \neq \emptyset$ eine Menge, die *transitiv* ist, d.h. $\bigcup x \subseteq x$. Definieren Sie eine $\{\in\}$-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Universum x, die "$\in$ durch $\in$ interpretiert". Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A}$ das Extensionalitätsaxiom erfüllt. Zeigen Sie ausserdem, daß hierbei auf die Voraussetzung der Transitivität von x im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 5 Zeigen Sie: die Existenz einer dreielementigen Menge ist nicht beweisbar in der Theorie, die aus dem Extensionalitätsaxiom, dem Fundierungsaxiom, dem Komprehensionsschema und dem Paaraxiom besteht.