**Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik**

**Blatt 12**

**Aufgabe 1** Für ein Modell $\mathfrak{A}$ von ZFC sei

$$\omega^{\mathfrak{A}} := \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models x \in \omega[a]\},$$

wobei "$x \in \omega$" eine geeignete $\{\in\}$-Formel $\varphi(x)$ abkürzt.

Zeigen Sie, daß es für jedes Modell $\mathfrak{A}$ von ZFC eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ gibt, so daß $\omega^{\mathfrak{A}} \subsetneq \omega^{\mathfrak{B}}$.

Zeigen Sie: es gibt ein nicht leeres $C \subseteq \omega^{\mathfrak{B}}$ ohne $\in^{\mathfrak{B}}$-minimales Element, d.h. für alle $c \in C$ gibt es $c' \in C$ mit $c' \in^{\mathfrak{B}} c$.

*Hinweis:* Blatt 7, Aufgabe 3.

**Aufgabe 2** Sei $bit : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ die Funktion, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n = \sum_{i=0}^{\lceil \log(n+1) \rceil} bit(i,n) \cdot 2^i.$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$ schreibe $m \in^{\mathbb{N}} n$ für $bit(m,n) = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ sagen wir, $n$ *kodiere* die Menge

$$set(n) := \{set(m) \mid m \in^{\mathbb{N}} n\}.$$

(a) Welches $n \in \mathbb{N}$ kodiert die Menge $S(S(S(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ?

(b) Zeigen Sie, daß eine Menge $x$ genau dann von einem $n \in \mathbb{N}$ kodiert wird, wenn $x \in X_\infty$. Hierbei ist $X_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und $X_n$ rekursiv definiert durch $X_0 := \emptyset, X_{n+1} := X_n \cup \mathcal{P}(X_n)$.

(c) Zeigen Sie, daß das Unendlichkeitsaxiom in $(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}})$ falsch ist, daß aber alle anderen Axiome von ZF in $(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}})$ wahr sind.

**Aufgabe 3** Arbeiten Sie in ZF. Zeigen Sie, eine Menge $x$ ist genau dann eine Ordinalzahl, wenn sie transitiv ist und alle ihre Elemente transitiv sind.

**Aufgabe 4** Arbeiten Sie in ZF. Für eine Menge $x$ sei $\mathcal{H}(x) := \{\alpha : \alpha \preceq x\}$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{H}(x)$ eine Ordinalzahl ist. Folgern Sie, daß $\mathcal{H}(x) \not\preceq \alpha$ für alle $\alpha < \mathcal{H}(x)$.

*Hinweis:* zeigen Sie zuerst daß $\mathcal{H}(x)$ eine Menge ist. Zeigen Sie dazu, daß es eine Injektion von $\mathcal{H}(x)$ in die Menge aller $(y, r)$ gibt, so daß $y \subseteq x$ und $r$ eine Wohlordnung auf $y$ ist.