Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 3

Sei L eine Sprache, die nur Relationssymbole enthält.

Aufgabe 1 Seien φ, ψ L-Aussagen und sei $\chi(x)$ eine L-Formel. Geben Sie Ableitungen der folgenden Sequenzen im Sequenzenkalkül.

1. $\succ ((\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi))$.
2. $\succ ((\forall \chi(x) \to \psi) \to \exists x(\chi(x) \to \psi))$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß Sie die folgenden Regeln zusätzlich verwenden dürfen:

$$\frac{\Delta, \varphi \succ \Gamma, \psi}{\Delta \succ \Gamma, (\varphi \to \psi)} \qquad \frac{\Delta_1 \succ \Gamma_1, \varphi \qquad \Delta_2, \psi \succ \Gamma_2}{\Delta_1, \Delta_2, (\varphi \to \psi) \succ \Gamma_1, \Gamma_2}$$

Hierbei schreiben wir z.B. $\Delta_1, \Delta_2, (\varphi \to \psi) \succ \Gamma_1, \Gamma_2$ statt $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(\varphi \to \psi)\} \succ \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Aufgabe 2 (Interpolationssatz von Craig-Lyndon) Ein Vorkommnis eines Relationssymbols in einer Formel ist *positiv (negativ)*, wenn es im Bereich geradzahlig (ungeradzahlig) vieler Negationssymbole steht.

Seien φ, ψ L-Aussagen, so daß $(\varphi \to \psi)$ allgemeingültig ist. Zeigen Sie, daß es eine L-Aussage χ gibt, so daß für alle $R \in L$ gilt:

1. sowohl $(\varphi \to \chi)$ als auch $(\chi \to \psi)$ ist allgemeingültig;
2. wenn R positiv in χ vorkommt, dann kommt R sowohl in φ als auch in ψ positiv vor;
3. wenn R negativ in χ vorkommt, dann kommt R sowohl in φ als auch in ψ negativ vor.

Sie dürfen annehmen, daß in φ, ψ keine Gleichheitssymbole vorkommen.

Hinweis: Beweis Interpolationssatz in Ziegler's Buch, Seite 30.

DIESER HINWEIS FUNKTIONIERT NICHT! BITTE LASSEN SIE DIE AUFGABE WEG. BITTE ENTSCHULDIGEN SIE DEN FEHLER.

Aufgabe 3 (Satz von Lyndon) Sei $R \in L$ einstelllig. Eine L-Aussage φ ist *monoton in* R, wenn für alle L-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ auch $\mathfrak{A}' \models \varphi$ gilt für jede L-Struktur $\mathfrak{A}'$, die aus $\mathfrak{A}$ durch Vergrösserung von R entsteht, d.h. $R^{\mathfrak{A}} \subseteq R^{\mathfrak{A}'}$ und $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{A}'}$ für alle $S \in L \setminus \{R\}$. Eine L-Aussage φ ist *positiv in* R, wenn R nicht negativ in φ vorkommt.

Zeigen Sie:

1. Jede L-Aussage, die positiv in R ist, ist auch monoton in R.

2. Jede L-Aussage φ, die monoton in R ist, ist logisch äquivalent zu einer L-Aussage, die positiv in R ist. Sie dürfen wieder annehmen, dass φ keine Gleichheitssymbole enthält.

   Hinweis: φ' entstehe aus φ indem man jedes Vorkommnis von R durch eine Kopie R' ersetzt. Betrachten Sie die Sequenz $\varphi, \forall x(Rx \to R'x) \succ \varphi'$ und verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (Bethscher Definierbarkeitssatz) Sei $R \in L$ einstellig und T eine L-Theorie. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. T *definiert* R *implizit*, d.h. es gilt $T \cup T' \vdash \forall x(Rx \leftrightarrow R'x)$, wobei $R' \notin L$ einstellig ist, und T' die $(L \setminus \{R\}) \cup \{R'\}$-Theorie ist, die aus T entsteht, wenn man in jeder Aussage in T das Symbol R durch R' ersetzt.

2. T *definiert* R *explizit*, d.h. es gibt eine $L \setminus \{R\}$-Formel $\varphi(x)$, so daß $T \vdash \forall x(Rx \leftrightarrow \varphi(x))$.

Hinweis zur Implikation von (1) nach (2): OBdA ist T endlich (warum?). Für eine neue Konstante c, wenden Sie auf

$$((\bigwedge T \wedge Rc) \to (\bigwedge T' \to R'c))$$

den Interpolationssatz an (gilt auch für Sprachen, die Konstanten enthalten).