Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 4

Aufgabe 1 Seien L eine endliche Sprache, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ L-Strukturen, $k, m \in \mathbb{N}$, $\bar{a} \in A^k, \bar{b} \in B^k$. Das Spiel $G_m^*(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ sei definiert wie $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ mit der Einschränkung, daß Spieler I immer die Struktur $\mathfrak{A}$ wählt.

Eine L-Formel φ ist *existentiell*, wenn sie aus Literalen (atomare Formeln oder negierte atomare Formeln) mittels $\wedge, \vee$ und existentieller Quantifikation $\exists x$ gebildet werden kann.

Zeigen Sie, daß es eine termreduzierte, existentielle Formel $\psi^m_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{x})$ gibt, so daß für alle L-Strukturen $\mathfrak{B}$ und alle $\bar{b} \in B^k$ gilt:

$$\textit{II gew. } G_m^*(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b}) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi^m_{\mathfrak{A},\bar{a}}[\bar{b}].$$

Zeigen Sie, daß für alle $\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b}$ wie oben die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) *II gew.* $G_m^*(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.

(b) für jede termreduzierte, existentielle Formel $\varphi(\bar{x})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\bar{b}].$$

Aufgabe 2 Sei $L = \{P_1, \ldots, P_r\}$ eine Menge einstelliger Relationssymbole. Für eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ und $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) \in \{0,1\}^r$ sei

$$A_\epsilon := \textstyle\bigcap_{i \in [r]} P_i^{\epsilon_i},$$

wobei

$$P_i^{\epsilon_i} := \begin{cases} P_i^{\mathfrak{A}} & \text{falls } \epsilon_i = 1 \\ A \setminus P_i^{\mathfrak{A}} & \text{falls } \epsilon_i = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß für alle L-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

(b) $\min\{|A_\epsilon|, m\} = \min\{|B_\epsilon|, m\}$ für alle $\epsilon \in \{0,1\}^r$.

Folgern Sie, daß es keinen L-Satz φ gibt, so daß für jede *endliche* L-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Longleftrightarrow |A| \text{ ist gerade.}$$

Aufgabe 3 Sei $L = \{<, \min, \max\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol $<$ und Konstanten $\min, \max$. Eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine *Ordnung*, wenn $(A, <^{\mathfrak{A}})$ eine (lineare) Ordnung ist mit Minimum $\min^{\mathfrak{A}}$ und Maximum $\max^{\mathfrak{A}}$.

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ endliche Ordnungen mit $|A| \geq 2^m$ und $|B| \geq 2^m$. Zeigen Sie, daß

$$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}.$$

Folgern Sie, daß es keinen L-Satz φ gibt, so daß für jede endliche Ordnung $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Longleftrightarrow |A| \text{ ist gerade.}$$

Hinweis: Für eine Ordnung $\mathfrak{A}$ und $a, a' \in A$ sei

$$d(a, a') := |\{b \in A \mid a <^{\mathfrak{A}} b \leq^{\mathfrak{A}} a'\}|.$$

Für $j \in \mathbb{N}$ sei $d_j(a, a') := \min\{d(a, a'), 2^j\}$. Zeigen Sie $(I_j)_{j \leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ für

$$I_j := \{p \in \mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mid p \text{ “erhält” } d_j\}.$$