Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 5

Sei E ein zweistelliges Relationssymbol. Ein *Graph* ist eine $\{E\}$-Struktur $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ mit irreflexivem und symmetrischem $E^{\mathfrak{G}}$.

Aufgabe 1 Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, sei $\mathfrak{G}_n$ der Zykel mit $n+1$ Knoten, das ist der Graph mit Universum $G_n := \{0, \ldots, n\}$ und

$$E^{\mathfrak{G}_n} := \big\{(i,j) \in G_n^2 \mid |i-j| = 1\} \cup \{(n,0),(0,n)\big\}.$$

Für Graphen $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ sei $\mathfrak{G} \dot\cup \mathfrak{H}$ der Graph mit Universum $(G \times \{0\}) \cup (H \times \{1\})$ und

$$E^{\mathfrak{G}\dot\cup\mathfrak{H}} := \big\{((g,0),(g',0)) \mid (g,g') \in E^{\mathfrak{G}}\big\} \cup \big\{((h,1),(h',1)) \mid (h,h') \in E^{\mathfrak{H}}\big\}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{G}_n \cong_\ell \mathfrak{G}_n \dot\cup\, \mathfrak{G}_n$ falls $n \geq 2^\ell$.

Hinweis: Für einen Graphen $\mathfrak{G}$ und $g, g' \in G$ sei $d(g,g')$ die Länge des kürzesten Pfades von g nach g' in $\mathfrak{G}$; wenn es keinen solchen Pfad gibt, so sei $d(g,g') = \infty$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$d_j(g,g') := \begin{cases} d(g,g') & \text{falls } d(g,g') < 2^{j+1}, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $(I_j)_{j \leq \ell} : \mathfrak{G}_n \cong_\ell \mathfrak{G}_n \dot\cup\, \mathfrak{G}_n$ für I_j die Menge der partiellen Isomorphismen der Grösse $\leq m - j$, "die d_j erhalten".

Aufgabe 2 (Satz von Herbrand) Sei L eine Sprache, T eine Menge von universellen L-Sätzen (siehe Blatt 1, Aufgabe 2) und $\varphi(x,y)$ eine quantorenfreie L-Formel. Es gelte

$$T \vdash \forall x \exists y\ \varphi(x,y).$$

Zeigen Sie, daß es $n \geq 1$ und L-Terme $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ gibt, so daß

$$T \vdash \forall x\ \big(\varphi(x,t_1(x)) \vee \ldots \vee \varphi(x,t_n(x))\big).$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß falls die Konklusion falsch ist, dann die Theorie

$$T \cup \{\neg\varphi(c,t) \mid t \text{ ist ein } L \cup \{c\}\text{-Term ohne freie Variable}\}$$

konsistent ist. Hierbei ist c eine "neue" Konstante.

Aufgabe 3 Für $n \in \mathbb{N}, I \subseteq [n]$ ist der Satz

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i = x_j \rightarrow \right.$$
$$\left. \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \neg x_i = y \wedge \bigwedge_{i \in I} E x_i y \wedge \bigwedge_{i \notin I} \neg E x_i y \right)$$

ein sogenanntes *Extensionsaxiom*.

1. Zeigen Sie, daß es einen abzählbaren Graphen gibt, der alle Extensionsaxiome erfüllt. Ein solcher Graph heisst *Zufallsgraph*.

2. Zeigen Sie, daß je zwei Zufallsgraphen isomorph sind.

3. Folgern Sie, daß die Menge der Extensionsaxiome eine vollständige Theorie ist.

Aufgabe 4 Seien L eine Sprache, $\mathfrak{A}$ eine höchstens abzählbare L-Struktur und $\mathfrak{B}$ eine beliebige L-Struktur.

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} \xrightarrow{a} \mathfrak{B}$ genau dann, wenn es ein $I \subseteq \mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ mit der (Hin)-Eigenschaft gibt.

Folgern Sie:

1. Jede höchstens abzählbare Ordnung ist in $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$ einbettbar.

2. Jeder höchstens abzählbare Graph ist in den Zufallsgraphen einbettbar.