Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 6

Aufgabe 1 Sei $\leq$ ein zweistelliges Relationssymbol. Ein *gerichtetes System* ist eine partielle Ordnung $\mathfrak{I} := (I, \leq^{\mathfrak{I}})$ so dass

$$\mathfrak{I} \models \forall x \forall y \exists z (x \leq z \wedge y \leq z)$$

Sei L eine Sprache, $\mathfrak{I}$ ein gerichtetes System, $i_0 \in I$, und $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von L-Strukturen, so daß $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$ für alle $i \leq^{\mathfrak{I}} j$. Eine solche Familie heisst *gerichtetes System von L-Strukturen.*

Die Struktur $\mathfrak{A}$ ist die L-Struktur mit Universum $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, die Relationssymbole $R \in L$, Funktionssymbole $f \in L$ und Konstanten $c \in L$ wie folgt interpretiert:

$$\begin{array}{rcl} R^{\mathfrak{A}} & := & \bigcup_{i \in I} R^{\mathfrak{A}_i}, \\ f^{\mathfrak{A}} & := & \bigcup_{i \in I} f^{\mathfrak{A}_i}, \\ c^{\mathfrak{A}} & := & c^{\mathfrak{A}_{i_0}}. \end{array}$$

1. Zeigen Sie daß $\mathfrak{A}$ wohldefiniert ist. Die Struktur $\mathfrak{A}$ wird mit $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ bezeichnet und heisst *Vereinigung von* $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$.

2. Zeigen Sie, daß jeder $\forall\exists$-Satz, der in allen $\mathfrak{A}_i$ gilt, auch in $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ gilt. Hierbei, ist ein $\forall\exists$-Satz ein L-Satz der Form

   $$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

   für $n, m \in \mathbb{N}$ und φ quantorenfrei.

3. Präzisieren und beweisen Sie: "Jede L-Struktur ist die Vereinigung des gerichteten Systems ihrer endlich erzeugten Substrukturen."

Aufgabe 2 Für p eine Primzahl oder $p = 0$ geben Sie eine Theorie T_{AAK_p} an, deren Modelle genau die algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p sind.

Zeigen Sie, daß ein Satz in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 genau dann gilt, wenn er in allen algebraisch abgeschlossenen

Körpern genügend großer Charakteristik gilt. Sie dürfen verwenden, daß T_{AAK_0} vollständig ist.

Folgern Sie, daß der Körper der komplexen Zahlen jeden $\forall\exists$-Satz erfüllt, der in allen endlichen Körpern gilt.

Hinweis; Verwenden Sie Aufgabe 1. Bemerken Sie, daß algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik $p > 0$ *lokal endlich* sind (ihre endlich erzeugten Substrukturen sind endlich).

Aufgabe 3 Sei E ein zweistelliges Relationssymbol. Ein *gerichteter Graph* ist eine $\{E\}$-Struktur $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ mit irreflexivem $E^{\mathfrak{G}}$. Er ist *azyklisch*, wenn es keine endliche Folge $(g_i)_{i \leq n}$ paarweise verschiedener Knoten $g_i \in G$ gibt mit $(g_n, g_0) \in E^{\mathfrak{G}}$ und $(g_i, g_{i+1}) \in E^{\mathfrak{G}}$ für alle $i < n$.

Zeigen Sie, daß ein gerichteter Graph $\mathfrak{G}$ genau dann azyklisch ist, wenn es eine (lineare) Ordnung $<$ auf G gibt mit $E^{\mathfrak{G}} \subseteq <$.