Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 7

Aufgabe 1 Sei $\mathfrak{I} := (I, \leq^{\mathfrak{I}})$ ein gerichtetes System. Sei L eine Sprache und $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ ein *elementares* gerichtetes System von L-Strukturen, d.h. $\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \mathfrak{A}_j$ für alle $i \leq^{\mathfrak{I}} j$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A}_j \preccurlyeq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ für alle $j \in I$.

Aufgabe 2 Sei L eine abzählbare Sprache. Zeigen Sie, daß jede unendliche L-Struktur $\mathfrak{B}$ eine abzählbare elementare Substruktur hat.

Hinweis: Konstruieren Sie eine abzählbare Menge $B_0 \subseteq B$, die für jede L-Formel $\varphi(\bar{x}, y)$ und jedes Tupel $\bar{b}$ aus B_0 ein b mit $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, b)$ enthält, falls es ein solches b gibt.

Aufgabe 3 Sei L eine Sprache und $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Für jedes $a \in A$ sei injektiv eine neue Konstante $c_a \notin L$ gewählt. Dann bezeichnet $\mathfrak{A}_A$ die $(L \cup \{c_a \mid a \in A\})$-Struktur mit Universum A, die jedes Symbol aus L so wie $\mathfrak{A}$ interpretiert und jede neue Konstante c_a durch a interpretiert. Die Menge $\{\varphi \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi\}$ der $(L \cup \{c_a \mid a \in A\})$-Sätze, die in $\mathfrak{A}_A$ gelten, heißt *elementares Diagramm von* $\mathfrak{A}$.

Sei L' eine Sprache mit $L \subseteq L'$. Für eine L'-Struktur $\mathfrak{B}'$ bezeichne $\mathfrak{B}' \upharpoonright L$ die Restriktion von $\mathfrak{B}'$ auf L. Sei T eine L'-Theorie und $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Es gibt eine L'-Struktur $\mathfrak{B}'$, so daß $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \upharpoonright L$ und $\mathfrak{B}' \models T$.

(ii) Die Vereinigung von T und dem elementaren Diagramm von $\mathfrak{A}$ ist konsistent.

Aufgabe 4 Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ und $\mathfrak{K}$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{R}$, d.h. $\mathfrak{R} \preccurlyeq \mathfrak{K}$. Ein Element $a \in K$ heißt *endlich*, wenn es $r \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $-r \leq^{\mathfrak{K}} a \leq^{\mathfrak{K}} r$, und *infinitesimal*, wenn für alle positiven $r \in \mathbb{R}$ gilt, daß $-r \leq^{\mathfrak{K}} a \leq^{\mathfrak{K}} r$. Es bezeichne I die Menge der infinitesimalen Elemente von $\mathfrak{K}$, und E die Menge der endlichen Elemente von $\mathfrak{K}$.

1. Zeigen Sie, daß es $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{R} \preccurlyeq \mathfrak{K}$ gibt, so daß die Mengen I und $K \setminus E$ unendlich sind.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3, um ein $\mathfrak{R} \preccurlyeq \mathfrak{K}$ mit $K \setminus E \neq \emptyset$ zu finden.

2. Zeigen Sie, daß E abgeschlossen ist unter $+^{\mathfrak{K}}, \cdot^{\mathfrak{K}}, -^{\mathfrak{K}}$; für $a \in K$ is dabei $-^{\mathfrak{K}}a$ das Inverse von a bezüglich $+^{\mathfrak{K}}$. Zusammen mit den Operationen aus $\mathfrak{K}$ bildet E also einen Ring $\mathfrak{E}$ (kommutativ, mit Eins).
3. Zeigen Sie, daß I ein maximales Ideal in $\mathfrak{E}$ ist.
4. Für $a \in E$ sei $st : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

   $$st(a) := \inf\{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r\}.$$

   Zeigen Sie, daß st ein Ringhomomorphismus mit Kern I ist und

   $$\mathfrak{E}/I \cong (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1).$$