Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 8

Aufgabe 1 Sei T die Theorie der dichten Ordnungen (ohne Randpunkte; siehe Flum's Skript, Seite 9). Zeigen Sie, daß T Quantorenelimination hat.

Aufgabe 2

1. Geben Sie das Flussdiagramm (siehe Ziegler's Buch, Seiten 70ff) einer Registermaschine an, die die zweistellige Funktion $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \dot{-} x_2 := \max\{x_1 - x_2, 0\}$ berechnet.

2. Geben Sie das Flussdiagramm eine Registeraschine an, die bei Eingabe $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit Ausgabe $|z_1 + z_2|$ hält. Unter *Eingabe* $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ sei hierbei die Eingabe $(b_1, x_1, b_2, x_2) \in \mathbb{N}^4$ verstanden, wobei $x_i = |z_i|$ und $b_i \in \{0, 1\}$ das Vorzeichen von z_i "angibt".

   Hinweis: Verwenden Sie im Diagramm eine Registermaschine $M^{r,s}$, die $\dot{-}$ der Inhalte ihres r-ten und s-ten Register berechnet.

Aufgabe 3 Kodieren Sie eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ durch $\ulcorner z \urcorner := \langle b, |z| \rangle$ wobei $b \in \{0, 1\}$ das Vorzeichen "angibt". Kodieren Sie Polynome $P(X) = \sum_{i=0}^{d} z_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ durch $\ulcorner P \urcorner := \langle \ulcorner z_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner z_d \urcorner \rangle$.

1. Zeigen Sie daß es eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, so daß $f(\ulcorner P \urcorner, x) = \ulcorner P(x) \urcorner$ für alle $P \in \mathbb{Z}[X]$ und $x \in \mathbb{N}$.

   Hinweis: Tun Sie das zuerst für Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{N}$. Dafür könnte eine Funktion, die $(\ulcorner P \urcorner, x) \mapsto \langle x^0, \ldots, x^d \rangle$ für d den Grad von P, berechnet, von Nutzen sein.

2. Zeigen Sie, daß die Menge

   $$\{\ulcorner P \urcorner \mid P \in \mathbb{Z}[X] \text{ hat eine Nullstelle in } \mathbb{N}\}$$

   rekursiv ist.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß wenn P nicht das Nullpolynom ist, dann $P(x) = 0$ nur für durch die Norm von P beschränkte $x \in \mathbb{N}$ gelten kann. Die *Norm von P* ist die Summe der Absolutbeträge der Koeffizienten von P.

Aufgabe 4 Sei $\mathcal{M}$ eine Registermaschine, die bei jeder Eingabe $n \in \mathbb{N}$ nach höchstens n^2 Schritten hält.

Zeigen Sie, daß $F^1_{\mathcal{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Kleene Normalform.