Winter 2014, Einführung in die mathematische Logik

Blatt 9

Für eine L_N-Formel φ stehen $\exists x < t\ \varphi$ und $\forall x < t\ \varphi$ für $\exists x(x < t \land \varphi)$ bzw. $\forall x(x < t \to \varphi)$. Hier sei verstanden, daß die Variable x nicht im L_N-Term t vorkommt. Für $\ell \in \mathbb{N}$ seien Σ_ℓ und Π_ℓ die wie folgt definierten Mengen von L_N-Formeln:

- eine L_N-Formel ist in $\Sigma_0 = \Pi_0$, wenn sie aus Literalen (atomare Formeln oder Negationen davon) durch Anwenden von $\land, \lor, \neg, \exists x < t$ und $\forall x < t$ entsteht;
- eine L_N-Formel ist in $\Sigma_{\ell+1}$, wenn sie aus Formeln in $\Pi_\ell \cup \Sigma_\ell$ durch Anwenden von $\land, \lor, \exists x$ und $\forall x < t$ entsteht;
- eine L_N-Formel ist in $\Pi_{\ell+1}$, wenn sie aus Formeln in $\Pi_\ell \cup \Sigma_\ell$ durch Anwenden von $\land, \lor, \forall x$ und $\exists x < t$ entsteht;

Aufgabe 1 Sei $\mathfrak{A}$ eine L_N-Struktur und $\mathfrak{B}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$, so daß für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt: wenn $a <^{\mathfrak{A}} b$, so $a \in B$.

Zeigen Sie:

1. Für jede Σ_0-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ und alle $b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:
$$\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k).$$
2. Für jede Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ und alle $b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:
$$\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k).$$

Aufgabe 2 Sei T die L_N-Theorie, die alle im Standardmodell $\mathfrak{N}$ wahren Π_1-Sätze enthält, und ausserdem das Induktionsschema für Σ_0-Formeln enthält, d.h. für jede Σ_0-Formel $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ den Satz

$$\forall y_1 \cdots \forall y_k \big(\ (\varphi(0, y_1, \ldots, y_k) \ \land \ \forall x(\varphi(x, y_1, \ldots, y_k) \to \varphi(x+1, y_1, \ldots, y_k))) \\ \to \forall x \varphi(x, y_1, \ldots, y_k) \ \big)$$

Gelte $\mathfrak{A} \models T$ und sei $\mathfrak{B}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$, so daß für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt: wenn $a <^{\mathfrak{A}} b$, so $a \in B$.

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{B} \models T$.

Aufgabe 3 (Satz von Parikh) Sei T die Theorie aus der vorigen Aufgabe und sei $\varphi(x, y) \in \Sigma_1$, so daß

$$T \vdash \forall x \exists y\ \varphi(x, y).$$

Zeigen Sie, daß es einen L_N-Term $t(x)$ gibt, so daß

$$T \vdash \forall x \exists y < t(x)\ \varphi(x, y).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Theorie

$$T \cup \{\forall y < t(c)\ \neg\varphi(c, y) \mid t(x) \text{ ist ein } L_N\text{-Term}\}$$

für eine "neue" Konstante c, und argumentieren Sie so ähnlich wie für Blatt 5, Aufgabe 2.