Kapitel III: Arithmetik

Erinnerung: die *Sprache der Arithmetik* ist $L_N = \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$. Die *Arithmetik* ist die Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) := \{\varphi \mid \varphi$ ist ein L_N-Satz, so daß $\mathfrak{N} \models \varphi\}$. Hierbei ist $\mathfrak{N}$ das *Standardmodell* mit Grundmenge $\mathbb{N}$, das die Symbole aus L_N in der naheliegenden Weise interpretiert.

Definition 1 Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ ist *arithmetisch* genau dann, wenn es eine L_N-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, die R (in $\mathfrak{N}$) *definiert*, das heisst:

$$R = \{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n \mid \mathfrak{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_n]\}.$$

Beachte, daß wir Funktionen mit ihren Graphen identifizieren. Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist also genau dann arithmetisch, wenn die Relation

$$\{(m_1, \ldots, m_n, m) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid f(m_1, \ldots, m_n) = m\}$$

arithmetisch ist.

Lemma 2 (Gödelsche β-Funktion) *Es gibt eine arithmetische Funktion*

$$\beta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},$$

so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ Zahlen $t, p \in \mathbb{N}$ existieren, so daß für alle $i \leq n$ gilt:

$$\beta(t, p, i) = x_i.$$

Beweis: Gegeben $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ wähle eine Primzahl p, die größer als $n+1$ und alle x_i ist. Setze

$$t := \sum_{i=0}^{n} \big((i+1)p^{2i} + x_i p^{2i+1}\big).$$

Beachte, daß $(1, x_0, 2, x_1, \ldots, (n+1), x_n)$ die p-adische Darstellung von t ist.

Behauptung: Für alle $i \leq n$ und alle $y \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
y = x_i \quad \Longleftrightarrow \quad & \text{es gibt } b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{N}: \\
& t = b_0 + b_1\big((i+1) + yp + b_2 p^2\big), && (1)\\
& y < p, && (2)\\
& b_0 < b_1, && (3)\\
& b_1 = p^{2z} \text{ für ein } z. && (4)
\end{aligned}$$

Beweis der Behauptung: Für die Richtung von links nach rechts setze:

$$\begin{aligned}
b_0 &:= 1 \cdot p^0 + x_0 p^1 + \cdots + x_{i-1} p^{2(i-1)+1}, \\
b_1 &:= p^{2i}, \\
b_2 &:= (i+2) + x_{i+1} p + \cdots + x_n p^{2(n-i)-1};
\end{aligned}$$

Hierbei sei verstanden, daß $b_0 = 0$, wenn $i = 0$, und daß $b_2 = 0$, wenn $i = n$.

Umgekehrt, gelte (1)-(4) für $b_0, b_1, b_2, z \in \mathbb{N}$. Wegen (1),(4) gilt dann

$$t = b_0 + (i+1)p^{2z} + yp^{2z+1} + b_2 p^{2z+2}.$$

Wegen $p > y, i+1$ und $b_0 < p^{2z}$ folgt aus der Eindeutigkeit der p-adischen Darstellung, daß $z = i$ und $y = x_i$. $\dashv$

Sei jetzt $(t, p, i) \in \mathbb{N}^3$ beliebig. Definiere $\beta(t, p, i)$ als das kleinste $y \in \mathbb{N}$, für das es $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß (1)–(4) gelten; wenn es kein solches y gibt, dann sei $\beta(t, p, j) := 0$.

Wir zeigen, daß β arithmetisch ist. Beachte, daß (4) äquivalent ist zu

$$b_1 \text{ ist eine Quadratzahl und } p \text{ teilt alle echten Teiler von } b_1. \tag{5}$$

Zur besseren Lesbarkeit verwenden wir t, p, i, b_0, b_1, b_2 und v, w, w', y, z als Variablen. Wir definieren zuerst eine L_N-Formel

$$\psi = \psi(t, p, i, b_0, b_1, b_2, y),$$

die ausdrückt, daß die Bedingungen (1), (2), (3) und (5) gelten:

$$\begin{aligned}
&t \doteq b_0 + b_1 \cdot \big((Si + y \cdot p) + (b_2 \cdot p) \cdot p\big) \\
&\wedge\ y < p \\
&\wedge\ b_0 < b_1 \\
&\wedge\ \exists v\ v \cdot v \doteq b_1 \wedge \forall w \big((S\underline{0} < w \wedge \exists w'\ w \cdot w' \doteq b_1) \rightarrow \exists w'\ p \cdot w' \doteq w\big).
\end{aligned}$$

Nach unseren Konventionen für die Sprache L_N schreiben wir beispielsweise $(y \cdot p)$ für den L_N-Term $\cdot yp$, und lassen ausserdem manche der Aussenklammern weg. Jetzt definiere $\varphi_\beta(t, p, i, y)$ durch

$$\Big(\exists b_0 \exists b_1 \exists b_2\ \psi \wedge\ \forall z(z < y \rightarrow \neg \exists b_0 \exists b_1 \exists b_2\ \psi \tfrac{z}{y}\Big) \vee \Big(y \doteq \underline{0} \wedge \neg \exists y \exists b_0 \exists b_1 \exists b_2\ \psi\Big).$$

Dann definiert φ_β die Funktion β. $\square$

Theorem 3 *Alle rekursiven Funktionen sind arithmetisch.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die Menge der arithmetischen Funktionen, die Eigenschaften (R0)-(R3) hat.

(R0): die Grundfunktionen sind offensichtlich arithmetisch. Beispielsweise wird die Nachfolgerfunktion durch die L_N-Formel $Sx \doteq y$ definiert.

(R1): seien $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ durch $\varphi_h(y_1, \ldots, y_k, y)$ bzw. $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, \varphi_k(x_1, \ldots, x_n, y)$ definiert. Dann wird die Funktion, die $\bar{m} := (m_1, \ldots, m_n)$ auf $h(g_1(\bar{m}), \ldots, g_k(\bar{m}))$ abbildet, definiert durch

$$\exists y_1 \cdots \exists y_k\ \Big(\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i(\bar{x}, y_i) \wedge \varphi_h(y_1, \ldots, y_k, y)\Big).$$

(R2): seien $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ durch $\varphi_g(\bar{x}, v)$ bzw. $\varphi_h(\bar{x}yz, v)$ definiert, und sei f durch primitive Rekursion aus g, h gewonnen, das heisst, $f(\bar{m}, m)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(\bar{m}, 0) &= g(\bar{m}), \\ f(\bar{m}, m+1) &= h(\bar{m}, m, f(\bar{m}, m)). \end{aligned}$$

Dann wird f durch die folgende Formel $\varphi_f(\bar{x}y, z)$ definiert:

$$\begin{aligned} \exists t \exists p \Big(& \exists v \ (\varphi_\beta(t, p, \underline{0}, v) \wedge \varphi_g(\bar{x}, v)) \\ & \wedge \ \forall i \ (i < y \to \exists v \exists v' \ \big(\varphi_\beta(t, p, i, v) \wedge \varphi_\beta(t, p, Si, v') \wedge \varphi_h(\bar{x}, i, v, v')\big)) \\ & \wedge \ \varphi_\beta(t, p, y, z) \ \Big). \end{aligned}$$

(R3): Sei $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ definiert durch $\varphi_g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y)$ und gelte:

$$\text{fa } \bar{m} \text{ ex } m : \ g(\bar{m}, m) = 0.$$

Dann wird die durch

$$f(\bar{m}) := \mu m(g(\bar{m}, m) = 0)$$

gegebene Funktion durch die Formel

$$\varphi_f(\bar{x}, y) := \varphi_g(\bar{x}, y, \underline{0}) \wedge \forall y' \big(y' < y \to \neg\varphi_g(\bar{x}, y', \underline{0})\big)$$

definiert. □

Übung 4 Geben Sie eine Formel an, die die Fakultätsfunktion definiert.

Korollar 5 *Jede rekursiv aufzählbare Relation ist arithmetisch.*

Beweis: Sei $R \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv aufzählbar. Wähle eine rekursive Relation $V_R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, so daß für alle $\bar{m} \in \mathbb{N}^n$:

$$\bar{m} \in R \iff \text{ex } m : (\bar{m}, m) \in V_R.$$

Dann ist die charakteristische Funktion $K_{V_R} : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0, 1\}$ von V_R rekursiv, nach obigem Theorem also definiert durch eine L_N-Formel $\varphi(x_1, \ldots x_{n+1}, y)$. Dann ist R definiert durch $\exists x_{n+1} \ \varphi(x_1, \ldots x_{n+1}, \underline{0})$. □

Übung 6 Zeigen Sie, daß es eine arithmetische Relation gibt, die nicht rekursiv aufzählbar ist.

Gödelisierung: wir ordnen den Zeichen a im Alphabet

$$(\quad) \quad \doteq \quad \wedge \quad \neg \quad \exists \quad S \quad \underline{0} \quad + \quad \cdot \quad < \quad x_0 \quad x_1 \quad \ldots$$

die folgenden Gödelnummern $\ulcorner a \urcorner$ zu:

$$\langle 0, 0\rangle \quad \ldots \quad \langle 0, 10\rangle \quad \langle 1, 0\rangle \quad \langle 1, 1\rangle \quad \ldots.$$

Ein Wort $w = a_0 \cdots a_{n-1}$ hat die Gödelnummer $\ulcorner w \urcorner := \langle \ulcorner a_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner a_{n-1} \urcorner \rangle$. Eine endliche Wortfolge $(w_0, \ldots, w_{\ell-1})$ hat die Gödelnummer $\langle \ulcorner w_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner w_{\ell-1} \urcorner \rangle$.

Lemma 7 *Die folgenden Relationen über* $\mathbb{N}$ *sind rekursiv:*

$\{\ulcorner t \urcorner \mid t$ ist ein L_N-Term$\}$,

$\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi$ ist ein L_N-Satz$\}$,

$\{(m, \ulcorner \varphi \urcorner) \mid m$ ist Gödelnummer eines Beweises von $\varphi\}$.

Beweis: (Skizze) Wir beschränken uns darauf, die Arbeitsweise einer Maschine $\mathbb{A}$ zu beschreiben, die die charakteristische Funktion der ersten Menge berechnet. Die Maschine soll also 0 oder 1 ausgeben je nachdem, ob ihr Input einen L_N-Term kodiert oder nicht.

Bei Input m berechnet $\mathbb{A}$ das erste Zeichen $(m)_0$ und prüft ob es entweder

1. eine Konstante ist, d.h. $(m)_0 = \langle 0, 7\rangle$; oder
2. eine Variable ist, d.h. $((m)_0)_0 = 1$ und $\lg((m)_0) = 2$; oder
3. das Funktionssymbol S ist, d.h. $(m)_0 = \langle 0, 6\rangle$; oder
4. eines der Funktionssymbole $+, \cdot$ ist, d.h. $(m)_0 = \langle 0, 8\rangle$ oder $(m)_0 = \langle 0, 9\rangle$.

Wenn keiner der Fälle zutrifft, hält $\mathbb{A}$ mit Ausgabe 1 (d.h. Antwort “nein”).

In den Fällen 1 und 2, hält $\mathbb{A}$ mit Ausgabe 0 (d.h. Antwort “ja”), wenn $\lg(m) = 1$, und sonst mit Ausgabe 1.

In den Fällen 3 und 4, rekurriert $\mathbb{A}$. Nämlich im Fall 3 rekurriert $\mathbb{A}$ auf $m' := \langle (m)_1, \ldots, (m)_{\lg(m) \dot{-} 1}\rangle$ (das heisst, $\mathbb{A}$ ruft sich selbst mit Input m' auf), und hält dann mit der entsprechenden Ausgabe. Im Fall 4 gibt $\mathbb{A}$ das durch folgende Schleife berechnete Bit aus: für jedes $0 < i < \lg(m) - 1$ berechnet $\mathbb{A}$ die Zahlen $m' := \langle (m)_1, \ldots, (m)_i\rangle$ und $m'' := \langle (m)_{i+1}, \ldots, (m)_{\lg(m) \dot{-} 1}\rangle$ und rekurriert erst auf m' und dann auf m''; wenn beide Rekurrenzen die Ausgabe 0 liefern, dann aktualisiert $\mathbb{A}$ das Bit durch 0; sonst lässt $\mathbb{A}$ das Bit unverändert und geht zum nächsten i. Am Anfang wird das Bit auf 1 gesetzt.

Beachte, daß $\mathbb{A}$ nur auf Eingaben m' mit $m' < m$ rekurriert. Per Induktion über m sieht man, daß $\mathbb{A}$ immer hält und zwar mit der gewünschten Ausgabe. $\square$

Übung 8 Beschreiben Sie eine Maschine, die bei Input $(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner t \urcorner)$ für eine L_N-Formel φ, eine Variable x und einen L_N-Term t, die Gödelnummer von $\varphi\frac{t}{x}$ berechnet.

Definition 9 Eine L_N-Theorie T ist *effektiv axiomatisierbar* genau dann, wenn $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in T\}$ rekursiv aufzählbar ist.

T ist *entscheidbar* genau dann, wenn $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi$ ist ein L_N-Satz mit $T \vdash \varphi\}$ rekursiv ist.

Theorem 10 *Sei T eine L_N-Theorie. Wenn T effektiv axiomatisierbar ist, dann ist* $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi$ ist ein L_N-Formel mit $T \vdash \varphi\}$ *rekursiv aufzählbar.*

Wenn ausserdem $\{\varphi \mid \varphi$ ist ein L_N-Satz mit $T \vdash \varphi\}$ *vollständig ist, dann ist T entscheidbar.*

Beweis: Sei f eine rekursive Funktion, die der Gödelnummer einer Folge von L_N-Formeln $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\ell)$ die Gödelnummer von $(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \varphi_i \to \varphi_0)$ zuordnet. Nach Voraussetzung ist

$$A := \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in T\}$$

rekursiv aufzählbar. Nach L7 ist

$$B := \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \ \vdash \varphi\}$$

rekursiv aufzählbar. Schreibe

$$C := \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid T \vdash \varphi\}.$$

Dann gilt $n \in C$ gdw.

$$\text{ex } m \ \ \big(\, f(\langle n, (m)_0, \ldots, (m)_{\lg(m)\dot{-}1} \rangle) \in B \text{ und fa } i < \lg(m) : (m)_i \in A \, \big).$$

Also ist C rekursiv aufzählbar.

Unter der Vollständigkeitsannahme müssen wir zeigen, daß

$$D := \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \text{ ist ein } L_N\text{-Satz mit } T \vdash \varphi\}$$

rekursiv ist. Sei g eine rekursive Funktion, so daß $g(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$ für jeden L_N-Satz φ. Nach L7 ist

$$E := \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \text{ ist ein } L_N\text{-Satz}\}$$

rekursiv. Weil $D = E \cap C$, ist D rekursiv aufzählbar. Es genügt also zu zeigen, daß auch das Komplement $\overline{D}$ von D rekursiv aufzählbar ist. Aber das stimmt: $n \in \overline{D}$ genau dann, wenn $n \in \overline{E}$ oder $g(n) \in C$ (wegen Vollständigkeit). □

<u>Notation:</u> Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n}$ der L_N-Term $S^n\underline{0}$, das heisst, $\underbrace{S \cdots S}_{n \text{ Mal}}\underline{0}$. Für eine beliebe Formel φ, stehe $\exists! x\varphi$ für die Formel

$$\exists x(\varphi \wedge \forall z(\varphi\tfrac{z}{x} \to x \doteq z)),$$

wobei z eine Variable sei, die nicht in φ vorkommt.

Definition 11 Sei T eine L_N-Theorie. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ ist *repräsentierbar in* T genau dann, wenn es eine L_N-Formel $\varphi_R(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, so daß für alle $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$:

(a) wenn $(m_1, \ldots, m_n) \in R$, so $T \vdash \varphi_R(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$;

(b) wenn $(m_1, \ldots, m_n) \notin R$, so $T \vdash \neg\varphi_R(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_n})$.

Dann sagt man, φ_R *repräsentiere* R *in* T.

Definition 12 Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist *(als Funktion) repräsentierbar in* T genau dann, wenn es eine L_N-Formel $\varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ gibt, so daß für alle $m_1, \ldots, m_n, m \in \mathbb{N}$:

(a) wenn $f(m_1, \dots, m_n) = m$, so $T \vdash \varphi_f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, \underline{m})$;

(b) wenn $f(m_1, \dots, m_n) \neq m$, so $T \vdash \neg\varphi_f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, \underline{m})$;

(c) $T \vdash \exists! x\ \varphi_f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n}, x)$.

Dann sagt man, φ_f *repräsentiere* f *in* T.

Übung 13 Jede konstante Funktion ist in $\{\neg \underline{n} \doteq \underline{m} \mid n \neq m\}$ repräsentierbar.

Bemerkungen und Beispiele 14 Sei T eine L_N-Theorie.

1. Wenn T inkonsistent ist, dann sind alle Relationen (Funktionen) über $\mathbb{N}$ in T repräsentierbar.

   Beweis: In einer inkonsistenten Theorie ist jeder Satz beweisbar. □

2. Wenn T *wahr* ist, das heisst, wenn $\mathfrak{N} \models T$, dann sind alle in T repräsentierbaren Relationen (Funktionen) arithmetisch; und zwar wird eine Relation (Funktion) durch jede Formel definiert, durch die sie in T repräsentiert wird.

   Beweis: Wenn $\varphi_R(x_1, \dots, x_n)$ die Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ repräsentiert, dann gilt nach dem Korrektheitssatz für alle $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$:

   (a) wenn $(m_1, \dots, m_n) \in R$, so $\mathfrak{N} \models \varphi_R(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n})$, und also $\mathfrak{N} \models \varphi_R[m_1, \dots, m_n]$ (Substitutionslemma);

   (b) wenn $(m_1, \dots, m_n) \notin R$, so $\mathfrak{N} \models \neg\varphi_R(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_n})$, und also $\mathfrak{N} \not\models \varphi_R[m_1, \dots, m_n]$.

   Daraus folgt $R = \{\bar{m} \mid \mathfrak{N} \models \varphi_R[\bar{m}]\}$. □

3. Wenn T' eine L_N-Theorie ist mit $T \subseteq T'$, dann sind die in T repräsentierbaren Relationen (Funktionen) auch in T' repräsentierbar.

4. Eine Relation (Funktion) ist in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ repräsentierbar genau dann, wenn sie arithmetisch ist.

   Beweis: Nach (2) bleibt die Richtung von rechts nach links zu zeigen. Wir zeigen das für Funktionen mit Stelligkeit $n = 1$ (allgemeines n geht genauso). Sei also $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ arithmetisch, etwa definiert durch $\varphi_f(x, y)$. Dann $\mathfrak{N} \models \exists^{=1} y\ \varphi_f(\underline{m}, y)$, und also $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \vdash \exists^{=1} y\ \varphi_f(\underline{m}, y)$ für alle m. Das zeigt D12(c). Für D12(b), gelte $f(m) \neq m'$; dann ist $\neg\varphi_f(\underline{m}, \underline{m'})$ wahr in $\mathfrak{N}$, also in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ beweisbar. D12(a) sieht man genauso. □

Definition 15 Eine L_N-Theorie T *erlaubt Repräsentierungen* genau dann, wenn alle rekursiven Relationen und Funktionen in T repräsentierbar sind.

Korollar 16 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ *erlaubt Repräsentierungen.*

Beweis: Rekursive Funktionen und Relationen sind arithmetisch nach T3, also in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ repäsentierbar nach B14(4). □

Theorem 17 (Fixpunktsatz von Gödel und Carnap) *Sei T eine L_N-Theorie, die Repräsentierungen erlaubt, und sei $\psi(y)$ eine L_N-Formel. Dann gibt es einen L_N-Satz φ, so daß*

$$T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner})).$$

Beweis: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, so daß $f(n,m) = \ulcorner \chi(\underline{m}) \urcorner$ falls $n = \ulcorner \chi(x) \urcorner$ für eine L_N-Formel $\chi(x)$; wenn n nicht diese Form hat, dann sei $f(n,m) = 0$. Nach Ü8 ist f rekursiv. Nach T3 gibt es eine L_N-Formel $\varphi_f(x_1, x_2, y)$, die f in T repräsentiert, d.h. so daß D12(a)-(c) gelten. Setze

$$\begin{aligned} \chi(x) &:= \forall y(\varphi_f(x,x,y) \to \psi(y)); \\ \varphi &:= \forall y(\varphi_f(\underline{\ulcorner \chi \urcorner}, \underline{\ulcorner \chi \urcorner}, y) \to \psi(y)). \end{aligned}$$

Beachte, daß $\varphi = \chi(\underline{\ulcorner \chi \urcorner})$, also $f(\ulcorner \chi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner) = \ulcorner \varphi \urcorner$ und damit

$$T \vdash \varphi_f(\underline{\ulcorner \chi \urcorner}, \underline{\ulcorner \chi \urcorner}, \underline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \tag{6}$$

nach D12(a). Nach Definition von φ und (6) folgt $T \vdash (\varphi \to \psi(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner}))$.

Es bleibt zu zeigen, daß $T \vdash (\psi(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \varphi)$. Aus D12(c) und (6) folgt

$$T \vdash \forall y(\varphi_f(\underline{\ulcorner \chi \urcorner}, \underline{\ulcorner \chi \urcorner}, y) \to y \doteq \underline{\ulcorner \varphi \urcorner}),$$

und damit

$$T \vdash (\psi(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \forall y(\varphi_f(\underline{\ulcorner \chi \urcorner}, \underline{\ulcorner \chi \urcorner}, y) \to \psi(y))),$$

was zu zeigen war. □

Korollar 18 *Sei T eine konsistente L_N-Theorie, die Repräsentierungen erlaubt. Dann ist $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi\ L_N\text{-Satz}, T \vdash \varphi\}$ nicht in T repräsentierbar.*

Beweis: Angenommen $\psi(x)$ repräsentiert die angegebene Menge. Dann gilt für jeden L_N-Satz χ

$$T \vdash \neg\psi(\underline{\ulcorner \chi \urcorner}) \quad \Longleftrightarrow \quad T \nvdash \chi. \tag{7}$$

Wenn $T \nvdash \chi$, so folgt $T \vdash \neg\psi(\underline{\ulcorner \chi \urcorner})$ nach D11(b). Wenn $T \vdash \chi$, so folgt $T \vdash \psi(\underline{\ulcorner \chi \urcorner})$ nach D11(a), also $T \nvdash \neg\psi(\underline{\ulcorner \chi \urcorner})$ nach Konsistenz von T.

Wähle φ für $\neg\psi(x)$ gemäss dem Fixpunktsatz:

$$T \vdash (\varphi \leftrightarrow \neg\psi(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner})). \tag{8}$$

Nach (8) ist $T \vdash \varphi$ äquivalent zu $T \vdash \neg\psi(\underline{\ulcorner \varphi \urcorner})$. Letzteres ist aber nach (7) äquivalent zu $T \nvdash \varphi$, Widerspruch. □

Korollar 19 (Satz von Tarski über die Undefinierbarkeit der Wahrheit) *Die Menge $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi\ L_N\text{-Satz}, \mathfrak{N} \models \varphi\}$ ist nicht arithmetisch.*

Beweis: Die Menge ist gleich $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi\ L_N\text{-Satz}, \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \vdash \varphi\}$. Wäre sie arithmetisch, so in $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ repräsentierbar (B14(4)). Das widerspricht K18, denn $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ ist konsistent und erlaubt Repräsentierungen nach K16. □

Theorem 20 (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz) *Sei T eine effektiv axiomatisierbare, konsistente L_N-Theorie, die Repräsentierungen erlaubt. Dann existiert ein L_N-Satz φ, so daß weder $T \vdash \varphi$ noch $T \vdash \neg\varphi$.*

Beweis: Sonst ist T entscheidbar nach T10, d.h. $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi\ L_N\text{-Satz}, T \vdash \varphi\}$ rekursiv, und also repräsentierbar – ein Widerspruch zu K18. $\square$