Satz 1 (Löwenheim Skolem aufwärts) *Sei L eine Sprache und T eine L-Theorie, die ein unendliches Modell hat. Weiter sei B eine beliebige Menge. Dann existiert ein Modell $\mathfrak{A}$ von T so daß es eine Injektion von B nach A gibt.*

Beweis: Seien c_b für $b \in B$ neue (d.h. nicht aus L), paarweise verschiedene Konstanten und sei

$$L' := L \cup \{c_b \mid b \in B\}.$$

Es genügt zu zeigen, daß die L'-Theorie

$$T' := T \cup \{\neg c_b \dot{=} c_{b'} \mid b, b' \in B, b \neq b'\}$$

ein Modell hat. In der Tat: wenn $\mathfrak{A}'$ ein Modell von T' ist, dann definiert

$$b \mapsto c_b^{\mathfrak{A}'}$$

eine Injektion von B nach A' und die Restriktion $\mathfrak{A}' \restriction L$ ist eine L-Struktur und Modell von T.

Gemäß dem Kompaktheitssatz genügt es, zu zeigen, daß jede endliche Teilmenge von T' ein Modell hat.

Sei also T'_0 eine beliebige endliche Teilmenge von T'. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $B_0 \subseteq B$ so daß

$$T'_0 \subseteq T'' := T \cup \{\neg c_b \dot{=} c_{b'} \mid b, b' \in B_0, b \neq b'\}.$$

Wir geben ein Modell von T'' an. Nach Voraussetzung gibt es eine unendliche L-Struktur $\mathfrak{M}$, die Modell von T ist. Sei I eine Injektion von B_0 nach M. Eine solche Injektion gibt es, weil M unendlich ist. Wir expandieren $\mathfrak{M}$ zu einer $L \cup \{c_b \mid b \in B_0\}$-Struktur $\mathfrak{M}^*$ indem wir c_b für $b \in B_0$ durch $I(b)$ interpretieren; genauer: $\mathfrak{M}^*$ hat Grundmenge M, interpretiert $s \in L$ durch $s^{\mathfrak{M}^*} := s^{\mathfrak{M}}$ und für jedes $b \in B_0$ die Konstante c_b durch

$$c_b^{\mathfrak{M}^*} := I(b).$$

Offenbar ist $\mathfrak{M}^*$ Modell von T''. $\square$