VORLESUNG GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK

WINTERSEMESTER 2018

DR. SANDRA MÜLLER

Diese Vorlesung bietet eine Einführung in die mathematische Logik. Wir werden zunächst Aussagen- und Prädikatenlogik einführen und den Gödelschen Vollständigkeitssatz behandeln. Im Anschluss werden wir Nichtstandard-Modelle der natürlichen Zahlen betrachten und mit deren Hilfe den berühmten ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz beweisen. Dann werden wir uns der Mengenlehre widmen und unter anderem das Auswahlaxiom in seinen Varianten diskutieren.

Zeiten: Donnerstags 14:10 - 14:55 Uhr und Freitags 16:45 - 18:15 Uhr.

Hier werden die Inhalte der einzelnen Vorlesungen kurz zusammengefasst. Dies dient nur zur groben Übersicht, keine Garantie auf Vollständigkeit!

Vorlesung 1 (Do 4.10.) Übersicht über die Vorlesung, Alphabet, aussagenlogische Formeln, Beginn des Beweises zur Eindeutigen Lesbarkeit

Vorlesung 2 (Fr 5.10.) Eindeutige Lesbarkeit, aussagenlogische Belegung, Erfüllbarkeit, Koinzidenzlemma, Allgemeingültigkeit, Kompaktheitssatz der Aussagenlogik (ohne Beweis)

Vorlesung 3 (Do 11.10.) Sprachen, Strukturen, Isomorphie von Strukturen, $\mathcal{L}$-Terme

Vorlesung 4 (Fr 12.10.) Eindeutige Lesbarkeit von Termen (Beweis Übungsaufgabe), $\mathcal{L}$-Formeln, Eindeutige Lesbarkeit von Formeln (ohne Beweis), Belegungen, Erfüllbarkeit, freie Variablen (siehe [Zie16])

Vorlesung 5 (Do 18.10.) Koinzidenzlemma, Aussagen, Elementare Äquivalenz, Notation für Substitutionen (siehe [Zie16])

Vorlesung 6 (Fr 19.10.) Substitutionslemma, Allgemeingültigkeit, 2. Koinzidenzlemma, Tautologien, Tautologien sind allgemeingültig (siehe [Zie16])

Vorlesung 7 (Do 25.10.) Axiome der Gleichheit, $\exists$-Quantorenaxiome, Modus Ponens, $\exists$-Einführung, Hilbertkalkül, Diskussion Vollständigkeitssatz (siehe [Zie16])

Vorlesung 8 (Do 8.11.) Beginn Beweis des Vollständigkeitssatzes: Ausreichend den Satz für Aussagen zu zeigen (siehe [Zie16])

Vorlesung 9 (Fr 9.11.) Fortsetzung des Beweises des Vollständigkeitssatzes: Theorien, widerspruchsfreie Theorien, Modelle, Henkintheorien, vollständige Theorien, Plan des Beweises, Schritt 1 und Schritt 2 (siehe [Zie16])

Date: 16. Januar 2019.

Vorlesung 10 (Do 15.11.) Schritt 3 im Beweis des Vollständigkeitssatzes, insb. Eindeutigkeit eines Modells aus Konstanten und Definition des Universums des Modells $\mathfrak{A}^*$ (siehe [Zie16])

Vorlesung 11 (Fr 16.11.) Ende des Beweises von Schritt 3 im Beweis des Vollständigkeitssatzes, insb. restliche Definition von $\mathfrak{A}^*$ und Beweis, dass $\mathfrak{A}^*$ ein Modell von T^* ist. Kompaktheitssatz, Definition von Abzählbarkeit, Satz von Löwenheim-Skolem (siehe [Zie16])

Vorlesung 12 (Do 22.11.) Definition Q, PA, Nichtstandard-Modelle von PA (Anwendung des Kompaktheitssatzes) (siehe Satz 4.3.2 in [Sch09])

Vorlesung 13 (Fr 23.11.) Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz, Beginn des Beweises mit Hilfe von Nichtstandard-Modellen (Definition der Formel Φ und Angabe des Nichtstandard-Modells) (siehe [Sch09])

Vorlesung 14 (Do 29.11.) Fortsetzung des Beweises des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes (siehe [Sch09])

Vorlesung 15 (Fr 30.11.) Ende des Beweises des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes (siehe [Sch09]), Diskussion der Axiome von ZFC bis zum Aussonderungsschema (Formale Axiome und Beispiele)

Vorlesung 16 (Do 6.12.) Diskussion der restlichen Axiome von ZFC (Formale Axiome und Beispiele)

Vorlesung 17 (Fr 7.12.) Definition Menge der von-Neumann-Zahlen ω, Definition Ordinalzahl, $(\omega, \{0,1\}, \{+, \cdot, exp\}, \{<\})$ ist ein Modell von PA, Klassen, BGC Axiome für Klassen

Zwischentest in den Übungen (Do 13.12.)

Vorlesung 18 (Fr 14.12.) Besprechung des Zwischentests

Weihnachtsferien

Vorlesung 19 (Do 10.01.) Diskussion des Auswahlaxioms (siehe Abschnitt 3.2 in [Sch09]), einfache Anwendungen und Äquivalenzen (Lemmas 3.2.2 und 3.2.3 in [Sch09]), Fundierte Relationen, Wohlordnungen

Vorlesung 20 (Fr 11.01.) Lemma 3.2.6 in [Sch09] (unendliche absteigende Folgen), Ordnungsisomorphismen, Der Wohlordnungssatz von Zermelo (Beginn des Beweises, Beweis von Lemma 7.10 im Skript)

Vorlesung 21 (Do 17.01.) Ende des Beweises des Wohlordnungssatzes

Vorlesung 22 (Fr 18.01.) Das Lemma von Zorn, das Hausdorffsche Maximalitätsprinzip und ihre Äquivalenz zum Auswahlaxiom

Vorlesung 23 (Do 24.01.) Rekursionssatz, die V_α Hierarchie

Vorlesung 24 (Fr 25.01.) Jede Wohlordnung ist zu genau einer Ordinalzahl isomorph, Mächtigkeit/Kardinalität einer Menge, Satz von Cantor, Kardinalzahlen, alle natürlichen Zahlen und ω sind Kardinalzahlen, $\aleph$ Notation, Kontinuumshypothese

Vorlesung 25 (Do 31.01.) Klausur

Literatur

[Sch09] Schindler, R.: *Logische Grundlagen der Mathematik.* Springer Berlin Heidelberg, 2009 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 9783540959328

[Zie16] ZIEGLER, M.: *Mathematische Logik*. Springer International Publishing, 2016 (Mathematik Kompakt). – ISBN 9783319441801