Skript zur Vorlesung
Grundzüge der mathematischen Logik

Dr. Sandra Müller

17. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Dies ist ein Skript zur Vorlesung "Grundzüge der mathematischen Logik", welches ich im Laufe dieses Semesters fortlaufend ergänzen werde. Insbesondere heißt dies, dass Sie mir Tippfehler und andere Anmerkungen sehr gerne jederzeit per E-Mail zuschicken können. Ich werde mich bemühen diese zeitnah auszubessern bzw. einzuarbeiten.

1.1 Übersicht

Was ist eigentlich Logik? Heutzutage gibt es Logik in vielen Bereichen, einer davon ist die Mathematik, aber der Begriff Logik taucht zum Beispiel auch in der Philosophie oder Informatik auf. Wir wollen uns hier mit der mathematischen Logik beschäftigen. Diese wird häufig in vier Bereiche aufgeteilt: Berechenbarkeitstheorie, Beweistheorie, Mengenlehre und Modelltheorie. Diese Vorlesung soll einen Einblick in diese Bereiche geben, wobei wir die Berechenbarkeitstheorie aus Zeitgründen zunächst ausklammern. Diese wird zum Beispiel in der Vorlesung "Introduction to theoretical computer science" behandelt.
Wir werden zunächst einmal klären was es überhaupt heißt, dass eine Aussage *wahr* ist oder dass sie *beweisbar* ist. Wir werden uns dann tiefgehender mit diesen Begriffen beschäftigen und sowohl den Gödelschen Vollständigkeitssatz als auch den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz beweisen. Dabei werden wir uns mit grundlegenden Beispielen wie den natürlichen Zahlen beschäftigen und merken, dass schon dieses vermeintlich simple Objekt zu unlösbaren Problemen führen kann. Das heißt, es gibt Aussagen über natürliche Zahlen, die weder bewiesen noch widerlegt werden können. Viele Beispiele für solche Aussagen finden sich im Gebiet der Mengenlehre. Daher werden wir uns am Ende des Semesters mit diesem Thema beschäftigen und verschiedene *Unendlichkeiten* untersuchen.
Für diese Vorlesung sind folgende Inhalte geplant.

1. Einführung
2. Gültigkeit und Beweisbarkeit von Formeln in der Aussagenlogik
3. Gültigkeit und Beweisbarkeit von Formeln in der Logik 1. Stufe (Prädikatenlogik)
4. Gödelscher Vollständigkeitssatz
5. Beispiel: Nichtstandard Modelle der natürlichen Zahlen
6. Gödelscher Unvollständigkeitssatz
   „Es gibt Aussagen über natürliche Zahlen, die weder bewiesen noch widerlegt werden können."

7. Mengenlehre: Diskussion des Auswahlaxiom und Varianten der Unendlichkeit

1.2 Literatur

Als Grundlage für die Vorlesung und für dieses Skript werden hauptsächlich die Bücher [3] und [2] verwendet. Hierbei werden wir die Kapitel 3 und 4 ähnlich aufbauen wie [3] und uns bei den Kapiteln 5 - 7 an [2] orientieren. Für Kapitel 2 kann [1] als weitere Literatur nützlich sein.

1.3 Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle Helge Holzmann danken, die im Sommersemester 2017 eine erste Version dieses Skriptes geschrieben hat. Zudem danke ich auch allen anderen Studenten die diese Vorlesung besuchen oder besucht haben und durch ihre Fragen und Anregungen die Veranstaltung lebendig gemacht haben. Außerdem danke ich Vera Fischer und Marlene Koelbing, welche im Sommersemester 2017 bzw. im Wintersemester 2018 die Übungen zur Vorlesung Grundzüge der mathematischen Logik gehalten haben, für die unzähligen heiteren Gespräche über diese Vorlesung und die dazugehörigen Übungsaufgaben.

Kapitel 2

Aussagenlogik

In der Aussagenlogik betrachten wir Formeln denen Wahrheitswerte zugewiesen werden. Dies können atomare Formeln (Variablen) sein oder zum Beispiel durch Junktoren wie *und*, *oder* oder *Negation* verknüpfte Formeln. Wir betrachten zunächst ein Beispiel.

Beispiel. $\underbrace{\underbrace{\text{9 ist durch 3 teilbar}}_{\underbrace{A}_{w}}\ \underbrace{\text{und}}_{\wedge}\ \underbrace{\text{9 ist eine Quadratzahl}}_{\underbrace{B}_{w}}}_{w}$

Bevor wir definieren können was eine Formel ist, müssen wir das Alphabet festlegen mit dem wir arbeiten.

Definition. Ein *Alphabet* A ist eine Menge von Zeichen. Die Menge $A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ ist die Menge der *Wörter* (über A), wobei Elemente von A^n *Länge* n haben. Es gibt genau ein Wort der Länge 0, das *leere Wort* ϵ. Für $w = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in A^n$ schreiben wir auch $w = a_0 \dots a_{n-1}$.

Definition. Ein Wort w ist ein *(echtes) Anfangsstück* von einem Wort v genau dann wenn ein (nicht leeres) Wort w' existiert, sodass $v = ww'$.

Definition. Betrachte folgendes Alphabet A: $(,\ \ ),\ \neg,\ \wedge,\ X_0,\ X_1,\ X_2, \dots$ wobei $Var = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ *aussagenlogische Variablen* sind.
Die Menge der *(aussagenlogischen) Formeln* ist die kleinste Menge, sodass

(1) jede Variable ist eine Formel.

(2) wenn φ eine Formel ist, so auch $\neg\varphi$.

(3) wenn φ und ψ Formeln sind, so auch $(\varphi \wedge \psi)$.

Formal präziser ausgedrückt:
Das ist die kleinste Menge F von Worten über A, sodass

(a) $Var \subseteq F$.

(b) wenn $\varphi \in F$, dann $\neg\varphi \in F$.

(c) wenn $\varphi, \psi \in F$, dann $(\varphi \wedge \psi) \in F$.

Bemerkung. Das ist *wohldefiniert*:

(1) Es gibt eine solche Menge F, z.B. $F = A^*$, die Menge aller Wörter über A.

(2) Es gibt eine kleinste solche Menge F: Die Menge $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, wobei $\mathcal{F}$ alle Mengen F enthält die (a)-(c) erfüllen.

Unsere Definition von Formel ist so gewählt, dass es eine eindeutige "Herkunft" gibt. Das heißt jede Formel ist entweder eine Variable, oder sie ist die Negation einer eindeutig bestimmten anderen Formel oder sie ist mit *und* aus zwei eindeutig bestimmten anderen Formeln hervor gegangen. Wir nennen dies "Eindeutige Lesbarkeit".

Lemma 2.1 (Eindeutige Lesbarkeit)**.**
Für jede Formel φ tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

(1) $\varphi = X$, *für* $X \in Var$*,*

(2) $\varphi = \neg\psi$, *für eine Formel* ψ*,*

(3) $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, *für Formeln* ψ, χ*.*

X, ψ *und* χ *sind jeweils eindeutig bestimmt.*

Beispiel. Der Ausdruck $A \wedge B \wedge C$ ist keine Formel in unserem Sinne. Die Klammern fehlen und daher ist nicht klar wie die Formel gelesen werden soll. In diesem Fall gibt es zwei Möglichkeiten:

$$A \wedge B \wedge C$$

$$((A \wedge B) \wedge C) \qquad (A \wedge (B \wedge C))$$

Beweis von Lemma 2.1. Sei F die Menge der Formeln und $\varphi \in F$ eine Formel. Es kann höchstens einer der Fälle (1)-(3) eintreten, da die Zeichen verschieden sind. Es muss auch immer mindestens einer der Fälle eintreten, denn wenn nicht, dann hat $F \setminus \{\varphi\}$ auch Eigenschaften (1)-(3)[1]. Dann wäre F nicht minimal. $\lightning$
Für die Fälle (1) und (2) ist die Eindeutigkeit klar.
Für den Fall (3) folgt sie aus der folgenden Behauptung:

Behauptung. *Es gibt keine Formel, die echtes Anfangsstück einer anderen Formel ist.*

Beweis der Behauptung. Angenommen nicht. Sei φ ein minimales Gegenbeispiel, das heißt eine Formel mit minimaler Länge, sodass es eine Formel φ' gibt, die ein echtes Anfangsstück von φ ist.

1. Fall: $\varphi \in Var$ nicht möglich.

2. Fall: $\varphi = \neg\psi$ für ein $\psi \in F$.
   Dann beginnt φ' mit „$\neg$", d.h. $\varphi' = \neg\psi'$ für $\psi' \in F$. ψ' ist ein echtes Anfangsstück von ψ. Doch ψ ist kürzer als φ, dies widerspricht der Minimalität von φ.

[1]Es ist nicht nötig auch die aus φ mittels (2) und (3) abgeleiteten Formeln aus F hinaus zu nehmen. $F \setminus \{\varphi\}$ wird sicherlich nicht minimal sein, aber es erfüllt (1)-(3).

3. Fall: $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ für $\psi, \chi \in F$.
   Dann beginnt φ' mit „(“, d.h. $\varphi' = (\psi' \wedge \chi')$ für Formeln φ', χ'.
   Angenommen $\psi \neq \psi'$.
   Dann ist entweder ψ echtes Anfangsstück von ψ' oder umgekehrt. In beiden Fällen bekommen wir einen Widerspruch zur Minimalität von φ.
   Also gilt: $\psi = \psi'$. Dann muss χ' echtes Anfangsstück von χ sein. Dies widerspricht erneut der Minimalität von φ.

Dies zeigt die Behauptung. □

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Bislang haben wir Formeln rein *syntaktisch* betrachtet, das heißt als Zeichenfolgen ohne Bedeutung. Nun betrachten wir die *Semantik*, das heißt die Bedeutung, von (aussagenlogischen) Formeln. Dazu belegen wir Formeln mit Wahrheitswerten.

Definition. Eine Funktion $\beta : Var \longrightarrow \{0,1\}$ heißt *(aussagenlogische) Belegung.*

Definition. Wir definieren $\vDash$ als die eindeutige *Relation* zwischen Belegung und Formeln, sodass für alle Belegungen β und alle Formeln ψ, χ und alle Variablen X gilt:

(1) $\beta \vDash X$ gdw. $\beta(X) = 1$,

(2) $\beta \vDash \neg\psi$ gdw. nicht $\beta \vDash \psi$ gilt (schreibe $\beta \nvDash \psi$),

(3) $\beta \vDash (\psi \wedge \chi)$ gdw. $\beta \vDash \psi$ und $\beta \vDash \chi$.

Wenn „$\beta \vDash \varphi$“ sagen wir „β erfüllt φ“ oder *„φ ist wahr unter β“*.

Übung: Zeigen Sie, dass es genau eine solche Relation mit (1)-(3) gibt.

Notation. Wir schreiben $(\varphi \vee \psi)$ für $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ und $(\varphi \to \psi)$ für $(\neg\varphi \vee \psi)$
Dann gilt für alle Belegungen β:

$\beta \vDash (\varphi \vee \psi)$ gdw. $\beta \vDash \varphi$ oder $\beta \vDash \psi$,

$\beta \vDash (\varphi \to \psi)$ gdw. wenn $\beta \vDash \varphi$, dann $\beta \vDash \psi$.

Definition. Sei $V \subset Var$ und β eine Belegung. Dann heißt $\beta \restriction V := \{(X, \beta(X)) | X \in V\}$ die *Einschränkung* von β auf V (auch partielle Belegung).

Das heißt $\beta \restriction V$ ist eine Funktion $\beta \restriction V \colon V \to \{0,1\}$ mit $\beta \restriction V(X) = \beta(X)$ für alle $X \in V$.
Das nächste Lemma zeigt, dass die Tatsache ob eine aussagenlogische Formel φ unter einer Belegung β gilt nur vom Wert von β auf den Variablen abhängt, die auch tatsächlich in φ vorkommen.

Lemma 2.2 (Koinzidenzlemma)**.**
Sei φ eine Formel und V eine Menge von Variablen, die alle in φ vorkommenden Variablen enthält. Für alle Belegungen β, γ mit $\beta \restriction V = \gamma \restriction V$ gilt $\beta \vDash \varphi$ gdw. $\gamma \vDash \varphi$.

Beweis. Per *Induktion über den Formelaufbau*, das heißt wir zeigen

(1) die Behauptung gilt für jede Variable,

(2) wenn die Behauptung für ψ gilt, dann gilt sie auch für $\neg\psi$, und

(3) wenn die Behauptung für ψ und χ gilt, dann gilt sie auch für $(\psi \wedge \chi)$.

Nun für unseren konkreten Fall:

(1) $\varphi = X \in V$. (trivial)

(2) $\varphi = \neg\psi$. Angenommen das Lemma gilt für ψ. Sei $V \subseteq Var$, sodass V alle Variablen aus $\neg\psi$ enthält. Seien β, γ Belegungen mit $\beta \restriction V = \gamma \restriction V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta \vDash \neg\psi &\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{nicht } \beta \vDash \psi \\ &\overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \text{nicht } \gamma \vDash \psi \\ &\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \gamma \vDash \neg\psi. \end{aligned}$$

(3) $\varphi = (\psi \wedge \chi)$. Analog zu (2).

□

Zum Schluss dieses Kapitels betrachten wir den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik. Das analoge Resultat für die Prädikatenlogik wird ein zentraler Satz im weiteren Verlauf der Vorlesung sein. Diese einfachere Variante für die Aussagenlogik ist daher eine gute Übung zum Aufwärmen.

Definition.

- Eine Formel φ heißt *allgemeingültig* oder *tautologisch*, wenn für alle Belegungen β gilt, dass $\beta \vDash \varphi$.
- Eine Formel φ heißt *erfüllbar*, wenn es eine Belegung β gibt, sodass $\beta \vDash \varphi$.
- Eine Menge von Formeln Φ heißt *erfüllbar*, wenn es eine Belegung β gibt mit $\beta \vDash \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Beispiel. Seien $X, Y, Z \in Var$ Variablen und betrachte die Formeln

$$\varphi_0 := (Y \to (X \vee Z))$$

$$\varphi_1 := \neg X$$

und

$$\varphi_2 := (Y \to Z).$$

Dann gilt

- φ_0, φ_1 und φ_2 sind jeweils erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.
- Die Formel $((\varphi_0 \wedge \varphi_1) \to \varphi_2)$ ist allgemeingültig.

Der Kompaktheitssatz verbindet nun die Erfüllbarkeit von einer möglicherweise *unendlichen* Menge von Formeln mit der Erfüllbarkeit von all ihren *endlichen* Teilmengen.

Satz 2.3 (Kompaktheitssatz der Aussagenlogik)**.**
Sei Φ eine Menge von Formeln, sodass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Dann ist Φ erfüllbar.

Beweis. Zu finden im Skript von Moritz Müller [1]. Der Beweis benutzt Kompaktheit im Sinne von Topologie. □

Kapitel 3

Prädikatenlogik - Logik 1. Stufe

Wir wollen nun kompliziertere Formeln (z.B. mit Quantoren) untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst Strukturen.

Beispiele für Strukturen:

- Ring: $(R, 0, 1, +, -, \cdot)$
- Gruppe: $(G, e, \circ, ^{-1})$
- reelle Zahlen: $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, \div)$ oder $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$
- natürliche Zahlen: $(\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot, <)$, wobei $s : n \mapsto n + 1$ die Nachfolgerfunktion ist.

Wir wollen Strukturen untersuchen, doch dafür müssen wir sagen können, wann zwei Strukturen "gleich aufgebaut" sind.

Definition. Eine *Sprache* ist ein Tripel $\mathcal{L} = (\mathcal{C}^{\mathcal{L}}, \mathcal{F}^{\mathcal{L}}, \mathcal{R}^{\mathcal{L}})$ von einer Menge von Konstantenzeichen $\mathcal{C}^{\mathcal{L}}$, Funktionszeichen $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ und Relationszeichen $\mathcal{R}^{\mathcal{L}}$, wobei Funktionszeichen und Relationszeichen eine positive Stelligkeit zugeordnet haben.

Beispiel. Beispiele bereits bekannter Sprachen:

- Ring-Sprache: $\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = (\{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{+}, \underline{-}, \underline{\cdot}\}, \emptyset)$.
- Sprache der natürlichen Zahlen: $\mathcal{L}_{\mathbb{N}} = (\{\underline{0}\}, \{\underline{S}, \underline{+}, \underline{\cdot}\}, \{\underline{\leq}\})$.
- Sprache der Mengenlehre: $\mathcal{L}_M = (\emptyset, \emptyset, \{\in\})$.
  Bemerkung: Die leere Menge $\emptyset$ ist als Konstante nicht nötig, da zum Beispiel $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Definition. Eine *$\mathcal{L}$-Struktur* für eine Sprache $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ ist ein Quadrupel $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{A}})$, wobei

(1) A eine nicht-leere Menge ist (das *Universum* von $\mathfrak{A}$),

(2) $\mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ aus Konstanten $c^{\mathfrak{A}} \in A$ für jedes $c \in \mathcal{C}$ besteht,

(3) $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ aus n-stelligen Funktionen $f^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A$ für jedes n-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{F}$ besteht und

(4) $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$ aus m-stelligen Relationen $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^m$ für jedes m-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{R}$ besteht.

Bemerkung. Wir hätten n-stellige Funktionen auch als $(n+1)$-stellige Relationen R_f definieren können durch $f(a_1, \ldots, a_n) = a_0 \Leftrightarrow R_f(a_0, \ldots, a_n)$. Ähnlich hätten wir Konstanten als 0-stellige Funktionen definieren können.

Im Folgenden sei $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache.

Definition. Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \mathcal{C}^{\mathfrak{B}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{B}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{B}})$ heißen *isomorph* (schreibe $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), wenn es eine Bijektion $F : A \to B$ gibt, welche mit den Interpretationen der Zeichen aus $\mathcal{L}$ kommutiert, d.h.

- $F(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ für alle $c \in \mathcal{C}$.
- $F(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n))$ für alle $f \in \mathcal{F}$ n-stellig.
- $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_m))$ für $R \in \mathcal{R}$ m-stellig.

Im Folgenden schreiben wir für Variablen $v_0, v_1, \ldots$.

Definition. Ein $\mathcal{L}$-*Term* ist eine Zeichenkette, sodass die Menge der $\mathcal{L}$-Terme die kleinste Menge $\mathcal{T}$ ist mit

(1) $v_0, v_1, \dots \in \mathcal{T}$ („jede Variable ist ein $\mathcal{L}$-Term“).

(2) $c \in \mathcal{T}$ für jedes $c \in \mathcal{C}^{\mathcal{L}}$.

(3) Wenn $f \in \mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ ein n-stelliges Funktionszeichen ist und $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, dann ist $ft_1 \ldots t_n \in \mathcal{T}$.

Notation. Wir schreiben häufig auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ für $ft_1 \ldots t_n$ oder wenn f 2-stellig ist $t_1 f t_2$ für ft_1t_2 (zum Beispiel falls $f = +$, schreiben wir $t_1 + t_2$).

Lemma 3.1 (Eindeutige Lesbarkeit für Terme)**.**
Für jeden $\mathcal{L}$-Term t tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

1. *t ist eine Variable,*
2. *t ist ein Konstantenzeichen aus $\mathcal{C}^{\mathcal{L}}$,*
3. *$t = ft_1, \ldots, t_n$, wobei $f \in \mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ n-stelliges Funktionzeichen aus $\mathcal{L}$ ist und $t_1, \ldots, t_n$ $\mathcal{L}$-Terme sind.*

Im letzten Fall sind f und $t_1, \ldots, t_n$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Siehe Übung. □

Definition. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Formeln* ist die kleinste Menge F, welche folgende Zeichenketten enthält:

(1) $t_1 \doteq t_2 \in F$, wenn t_1, t_2 $\mathcal{L}$-Terme sind,

(2) $Rt_1 \ldots t_n \in F$, wenn $R \in \mathcal{R}^{\mathcal{L}}$ ein n-stelliges Relationszeichen ist und $t_1, \ldots, t_n$ $\mathcal{L}$-Terme sind.

(3) $\neg\psi \in F$, wenn $\psi \in F$,

(4) $(\psi_1 \wedge \psi_2) \in F$, wenn $\psi_1, \psi_2 \in F$,

(5) $\exists v_0 \psi \in F$, wenn $\psi \in F$ und v_0 eine Variable ist.

Notation. Wir schreiben

$$\begin{array}{rcl}
(\psi_1 \vee \psi_2) & \text{für} & \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2) \\
(\psi_1 \rightarrow \psi_2) & \text{für} & (\neg\psi_1 \vee \psi_2) \\
(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) & \text{für} & ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)) \\
\forall x \psi & \text{für} & \neg\exists x \neg\psi \\
(\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_n) & \text{für} & (\ldots((\psi_0 \wedge \psi_1) \wedge \psi_2) \wedge \cdots \wedge \psi_n) \\
(\psi_0 \vee \cdots \vee \psi_n) & \text{für} & (\ldots((\psi_0 \vee \psi_1) \vee \psi_2) \vee \cdots \vee \psi_n)
\end{array}$$

“Bindungsstärke” absteigend: $\neg, \exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Beispiel. $\neg\phi \wedge \psi \rightarrow \chi$ steht für $((\neg\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$

Lemma 3.2 (Eindeutige Lesbarkeit für Formeln)**.**
Für jede $\mathcal{L}$-Formel ϕ tritt genau einer der Fälle (1)-(5) aus der Definition von $\mathcal{L}$-Formel ein. Zudem sind in jedem der Fälle $t_1, \ldots, t_n, R, \psi, \psi_1, \psi_2$ und v_0 jeweils eindeutig bestimmt.

Beweis. Analog zur eindeutigen Lesbarkeit für Terme, siehe Übung. □

Definition. Sei $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{A}})$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Eine *Belegung* für $\mathfrak{A}$ ist eine Funktion $\beta : \{v_0, v_1, \ldots\} \rightarrow A$, wobei v_i Variablen sind.

Wegen der eindeutigen Lesbarkeit für Terme können wir Belegungen sinnvoll auf Terme erweitern.

Definition. Sei t ein $\mathcal{L}$-Term, $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und β eine Belegung für $\mathfrak{A}$:
Dann definieren wir $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ rekursiv durch

(1) ${v_i}^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(v_i)$ für Variablen v_i,

(2) $c^{\mathfrak{A}}[\beta] = c^{\mathfrak{A}} \in \mathcal{C}^{\mathfrak{A}}$ für Konstantenzeichen $c \in \mathcal{C}^{\mathcal{L}}$,

(3) $f t_1 \ldots {t_n}^{\mathfrak{A}}[\beta] = f^{\mathfrak{A}}({t_1}^{\mathfrak{A}}[\beta], \ldots, {t_n}^{\mathfrak{A}}[\beta])$ für $f \in \mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ und $\mathcal{L}$-Terme $t_1, \ldots, t_n$.

Beispiel.

$$\mathcal{L} = (\{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{+}, \underline{\cdot}\}, \{\underline{\leq}\}),\ \mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \{0, 1\}, \{+, \cdot\}, \{<\})$$
$$t = (v_0 \underline{+} \underline{1}) \underline{\cdot} v_3,\ \beta(v_0, v_1, v_2, v_3) = (1, 3, 7, 5)$$
$$t^{\mathfrak{A}}[\beta] = (1 + 1) \cdot 5 = 10 \in \mathbb{N}$$

Man sieht leicht:

Lemma 3.3. *Wenn β und γ Belegungen für $\mathfrak{A}$ sind, die auf den Variablen, die in einem $\mathcal{L}$-Term t vorkommen, übereinstimmen, dann ist $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$.*

Definition. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, β eine Belegung für $\mathfrak{A}$ und ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel.
Dann definieren wir $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ („*ϕ trifft in $\mathfrak{A}$ auf β zu*“ oder „*$\mathfrak{A}$ glaubt ϕ für β*“) rekursiv:

(1) $\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2[\beta]$ gdw. ${t_1}^{\mathfrak{A}}[\beta] = {t_2}^{\mathfrak{A}}[\beta]$,

(2) $\mathfrak{A} \models Rt_1 \dots t_n[\beta]$ gdw. $R^{\mathfrak{A}}({t_1}^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, {t_n}^{\mathfrak{A}}[\beta])$

(3) $\mathfrak{A} \models \neg\psi[\beta]$ gdw. nicht $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$

(4) $\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta]$ gdw. $\mathfrak{A} \models \psi_1[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$

(5) $\mathfrak{A} \models \exists v_0 \psi[\beta]$ gdw. es gibt $a_0 \in A$ sodass $\mathfrak{A} \models \psi[\beta']$, wobei β' eine Belegung für $\mathfrak{A}$ ist mit $\beta'(v_i) = \beta(v_i)$ für $i \neq 0$ und $\beta'(v_0) = a_0$.

Beispiel. $\mathfrak{A}$ wie oben:

- $\phi = \underbrace{(v_0 \underline{+} \underline{1}) \underline{\cdot} v_3}_{\text{Term } t} \underline{\leq} v_2$ mit $\beta(v_0, v_1, v_2, v_3) = (1, 3, 7, 5)$
  $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ gdw. $10 < 7$, also $\mathfrak{A} \not\models \phi[\beta]$.
- Andere Belegung: $\gamma(v_0, v_1, v_2, v_3) = (1, 3, 12, 5)$
  $\mathfrak{A} \models \phi[\gamma]$ gdw. $10 < 12$, also $\mathfrak{A} \models \phi[\gamma]$.

Definition. Eine Variable v ist eine *freie Variable* in einer Formel ϕ, wenn sie in ϕ vorkommt und nicht durch „einen Quantor gebunden" ist, d.h.

(1) v ist frei in $t_1 \doteq t_2$ gdw. v in t_1 oder t_2 vorkommt,

(2) v ist frei in $Rt_1 \dots t_n$ gdw. v in mindestens einem der $t_1, \dots, t_n$ vorkommt,

(3) v ist frei in $\neg\psi$ gdw. v frei in ψ ist,

(4) v ist frei in $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ gdw. v frei in ψ_1 oder frei in ψ_2 ist,

(5) v ist frei in „$\exists x \psi$" gdw. v frei in ψ ist und $v \neq x$. In diesem Fall heißt x gebunden.

Beispiel. $\forall v_0((\exists v_1 R(v_0, v_1)) \wedge P(v_1, v_2))$

v_0 kommt nicht frei vor.

v_2 kommt frei vor.

v_1 kommt frei vor, aber gebunden in „$\exists v_1 R(v_0, v_1)$".

Satz 3.4 (Koinzidenzlemma)**.**
Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel und β und γ Belegungen für $\mathfrak{A}$. Wenn β und γ auf allen Variablen die frei in ϕ vorkommen übereinstimmen, dann gilt

$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \textit{ gdw. } \mathfrak{A} \models \phi[\gamma].$$

Beweis. Induktion über den Aufbau der Formel ϕ.

1. & 2. Fall: ϕ vom Typ (1) oder (2)
   $\Rightarrow$ Satz folgt aus Lemma 3.3.

3. & 4. Fall: ϕ vom Typ (3) oder (4)
   Beweis wie in der Aussagenlogik.

5. Fall:
   $\phi = \exists x\psi$. Dann gilt $\mathfrak{A} \vDash \exists x\psi$ gdw. es $a \in A$ gibt, sodass $\mathfrak{A} \vDash \psi[\beta']$ wobei
   $\beta'(y) = \begin{cases} \beta(y) & \text{, falls } x \neq y \\ a & \text{, falls } x = y \end{cases}$
   Nach Induktionsvoraussetzung gilt dies gdw. $\mathfrak{A} \vDash \psi[\gamma']$,
   wobei $\gamma'(y) = \begin{cases} \gamma(y) & \text{, falls } x \neq y \\ a & \text{, falls } x = y \end{cases}$.
   Daraus folgt $\mathfrak{A} \vDash \exists x\psi[\gamma]$.

□

Notation. Wir schreiben $\phi(v_1, \dots, v_n)$ falls $v_1, \dots, v_n$ paarweise verschiedene Variablen sind und in ϕ nur Variablen aus $\{v_1, \dots, v_n\}$ frei vorkommen.
Wegen des Koinzidenzlemmas können wir $\mathfrak{A} \vDash \phi\,[a_1, \dots, a_n]$ für $\mathfrak{A} \vDash \phi\,[\beta]$ schreiben für eine Belegung β mit $\beta(v_i) = a_i,\ 1 \leq i \leq n$.

Definition. Eine $\mathcal{L}$-*Aussage* ϕ ist eine $\mathcal{L}$-Formel ohne freie Variablen. Wir schreiben $\mathfrak{A} \vDash \phi$ wenn $\mathfrak{A} \vDash \phi\,[\beta]$ für eine (alle) Belegungen für $\mathfrak{A}$ gilt.

Definition. Wir sagen zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind *elementar äquivalent*, schreibe $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, genau dann wenn für alle $\mathcal{L}$-Aussagen ϕ,

$$\mathfrak{A} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \phi.$$

Notation. Wir benutzen folgende Notation für Substitutionen:
Für eine Variable v, Terme s, t und Formeln ϕ:

- entsteht t_v^s aus t durch Ersetzen aller Vorkommen von v durch s,
- entsteht ϕ_v^s aus ϕ durch Ersetzen aller freien Vorkommen von v durch s.
- Schreiben für $a \in A$, $\beta_v^a(x) = \begin{cases} \beta(x) & \text{, falls } x \neq v \\ a & \text{, falls } x = v \end{cases}$.
- Wir sagen v ist *frei für s in ϕ*, wenn kein freies Vorkommen von v in ϕ im „Wirkungsbereich“ eines Quantors liegt, der eine Variable von s bindet.

Beispiel. $\phi = \exists v_0(\forall v_1 R(v_0, v_1) \vee \exists v_2 P(v_2, v_3)),\ s = v_1 + v_2 \quad t = v_1 + \underline{1}$

v_0, v_1, v_2 kommen nicht frei vor in ϕ.

v_3 kommt frei in ϕ vor, aber im Wirkungsbereich $\exists v_0, \exists v_2$, d.h. v_3 ist *nicht* frei für s in ϕ, aber v_3 ist frei für t in ϕ.

Satz 3.5 (Substitutionslemma)**.**
Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, v eine Variable, s ein $\mathcal{L}$-Term und β eine Belegung für $\mathfrak{A}$. Dann gilt

(1) für jeden $\mathcal{L}$-Term t, $(t_v^s)^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta_v^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}]$

(2) für jede $\mathcal{L}$-Formel ϕ, $\mathfrak{A} \vDash \phi_v^s[\beta]$ gdw. $\mathfrak{A} \vDash \phi[\beta_v^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}]$, falls v frei für s in ϕ ist.

Beweis.

(1) Induktion nach Aufbau von t.

1. Wenn $t = v$, dann $(t^s_v)^{\mathfrak{A}}[\beta] = s^{\mathfrak{A}}[\beta] = v^{\mathfrak{A}}[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v] = t^{\mathfrak{A}}[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v]$.
   Wenn $t = \overline{v} \neq v$ für eine Variable $\overline{v}$ ist, dann
   $(t^s_v)^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(\overline{v}) = \overline{v}^{\mathfrak{A}}[\beta] = \overline{v}^{\mathfrak{A}}[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v] = t^{\mathfrak{A}}[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v]$.
2. Wenn $t = c$ Konstante, dann $(t^s_v)^{\mathfrak{A}}[\beta] = c^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v]$.
3. Wenn $t = ft_1 \dots t_n$, dann $(t^s_v)^{\mathfrak{A}}[\beta] \overset{\text{Def.}}{=} f^{\mathfrak{A}}(((t_1)^s_v)^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, ((t_n)^s_v)^{\mathfrak{A}}[\beta])$
   $\overset{\text{IV}}{=} f^{\mathfrak{A}}({t_1}^{\mathfrak{A}}[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v], \dots, {t_n}^{\mathfrak{A}}[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v]) = t^{\mathfrak{A}}[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v]$.

(2) Nehmen wir zunächst an, dass v nicht frei in ϕ vorkommt. Dann gilt $\phi^s_v = \phi$ und die Behauptung folgt aus dem Koinzidenzlemma (3.4).
Wir können also annehmen, dass v frei in ϕ vorkommt.
Induktion über den Aufbau von ϕ.

1. & 2. Wenn $\phi = t_1 \doteq t_2$ oder $\phi = Rt_1 \dots t_n$, dann folgt die Behauptung leicht aus (1).

3. Wenn $\phi = \neg\psi$ für eine $\mathcal{L}$-Formel ψ. Dann gilt:
   $\mathfrak{A} \models \phi^s_v[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi^s_v[\beta] \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \not\models \psi[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v]$.
4. Wenn $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \phi^s_v[\beta] &\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models (\psi_1)^s_v[\beta] \text{ und } \mathfrak{A} \models (\psi_2)^s_v[\beta] \\
&\overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \psi_1[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v] \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v] \\
&\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \phi[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v].
\end{aligned}$$

5. Wenn $\phi = \exists x\psi$ für eine $\mathcal{L}$-Formel ψ und eine Variable x. Dann muss $v \neq x$ gelten, da v nach Annahme frei in ϕ vorkommt.
   Außerdem kommt x nicht in s vor, da v frei für s in ϕ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \phi^s_v[\beta] &\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \psi^s_v[\beta^a_x] \text{ für ein } a \in A. \\
&\overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \psi[(\beta^a_x)^{s^{\mathfrak{A}}[\beta^a_x]}_v] \text{ für ein } a \in A. \\
&\overset{\text{Satz 3.4}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \psi[(\beta^a_x)^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v] \text{ für ein } a \in A, \text{ da } x \text{ nicht in } s \text{ vorkommt.} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[(\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v)^a_x] \text{ für ein } a \in A, \text{ da } v \neq x. \\
&\overset{\text{Def. } \phi}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta^{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v]
\end{aligned}$$

□

Kapitel 4

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz

Wir wollen beweisen, dass eine Formel *allgemeingültig* ist gdw. sie *beweisbar* ist. Dazu müssen wir zunächst diese beiden Begriffe verstehen und formalisieren.

Definition. Eine $\mathcal{L}$-Formel ϕ heißt *allgemeingültig*, wenn sie für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ für alle Belegungen β für $\mathfrak{A}$ gilt. Schreibweise: $\models \phi$

Beispiel. $x \doteq y \vee \neg(x \doteq y)$ ist allgemeingültig.

Satz 4.1 (2. Koinzidenzlemma)**.**
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathcal{K}$ eine Erweitung von $\mathcal{L}$, d.h. $\mathcal{C}^{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}^{\mathcal{K}}$, $\mathcal{F}^{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{F}^{\mathcal{K}}$, $\mathcal{R}^{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{R}^{\mathcal{K}}$. Sei ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel. Dann ist ϕ als $\mathcal{L}$-Formel allgemeingültig gdw. ϕ als $\mathcal{K}$-Formel allgemeingültig ist.

Beweis. Eine $\mathcal{L}$-Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist allgemeingültig gdw. wenn die Aussage $\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad \psi(x_1, \ldots, x_n)$ allgemeingültig ist.
Daher können wir annehmen, dass ϕ eine Aussage ist.

„$\Rightarrow$“ Beweis durch Widerspruch:
Angenommen ϕ ist als $\mathcal{L}$-Aussage allgemeingültig und es gibt eine $\mathcal{K}$-Struktur $\mathfrak{A}$, sodass $\mathfrak{A} \not\models \phi$.
Betrachte $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L} := \left(A, \left\{c^{\mathfrak{A}} : c \in \mathcal{C}^{\mathcal{L}}\right\}, \left\{f^{\mathfrak{A}} : f \in \mathcal{F}^{\mathcal{L}}\right\}, \left\{R^{\mathfrak{A}} : R \in \mathcal{R}^{\mathcal{L}}\right\}\right)$
Dann ist $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L} \not\models \phi$. $\lightning$

„$\Leftarrow$“ Beweis durch Widerspruch:
Angenommen ϕ ist als $\mathcal{K}$-Aussage allgemeingültig und es gib eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$, sodass $\mathfrak{B} \not\models \phi$. Sei $\mathfrak{B}' \supseteq \mathfrak{B}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{B}$ sodass $\mathfrak{B}' \upharpoonright \mathcal{L} = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ eine $\mathcal{K}$-Struktur ist (Insbesondere haben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ dasselbe Universum). Dann gilt auch $\mathfrak{B}' \not\models \phi$. $\lightning$

□

Fixiere eine Sprache $\mathcal{L}$.

Definition. Eine *Tautologie* ist eine $\mathcal{L}$-Formel, welche aus einer allgemeingültigen aussagenlogischen Formel durch Ersetzen der (aussagenlogischen) Variablen durch $\mathcal{L}$-Formeln entsteht.

Beispiel. $\phi \vee \neg\phi$ und $(\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ sind Tautologien.

Lemma 4.2. *Tautologien sind allgemeingültig.*

Beweis. Sei φ eine allgemeingültige aussagenlogische Formel mit Variablen $X_1, \ldots, X_n$ und seien $\psi_1, \ldots, \psi_n$ $\mathcal{L}$-Formeln.
Sei $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ die entsprechende Tautologie. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur und $\beta_{\mathfrak{A}}$ eine Belegung für $\mathfrak{A}$. Sei β_{Aus} eine aussagenlogische Belegung, sodass
$\beta_{Aus} \models X_i \overset{Def.}{\Leftrightarrow} \beta_{Aus}(x_i) = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_i[\beta_{\mathfrak{A}}]$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir zeigen per Induktion über den Aufbau von φ (Aussagenlogik!), dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)[\beta_{\mathfrak{A}}] \text{ gdw. } \beta_{Aus} \models \varphi$$

1. Fall: $\varphi = X_i$ für eine Variable X_i.
   Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)[\beta_{\mathfrak{A}}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_i[\beta_{\mathfrak{A}}] \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \beta_{Aus} \models X_i \Leftrightarrow \beta_{Aus} \models \varphi$.

2. Fall: $\varphi = \neg\bar{\varphi}$ für eine aussagenlogische Formel $\bar{\varphi}$. Dann gilt:
   $\mathfrak{A} \models \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)[\beta_{\mathfrak{A}}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \bar{\varphi}(\psi_1, \ldots, \psi_n)[\beta_{\mathfrak{A}}] \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \beta_{Aus} \not\models \bar{\varphi} \Leftrightarrow \beta_{Aus} \models \varphi$.

3. Fall: $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ für aussagenlogische Formeln φ_1, φ_2. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)[\beta_{\mathfrak{A}}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1(\psi_1, \ldots, \psi_n)[\beta_{\mathfrak{A}}] \text{ und } \varphi_2(\psi_1, \ldots, \psi_n)[\beta_{\mathfrak{A}}] \\ &\overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \beta_{Aus} \models \varphi_1 \text{ und } \beta_{Aus} \models \varphi_2 \\ &\Leftrightarrow \beta_{Aus} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \\ &\Leftrightarrow \beta_{Aus} \models \varphi. \end{aligned}$$

Dies beweist das Lemma. □

Lemma 4.3 (Axiome der Gleichheit)**.**
Die folgenden $\mathcal{L}$-Aussagen sind allgemeingültig:

1. *Reflexivität:* $\forall x\ x \doteq x$
2. *Symmetrie:* $\forall x \forall y\ x \doteq y \rightarrow y \doteq x$
3. *Transitivität:* $\forall x \forall y \forall z\ x \doteq y \wedge y \doteq z \rightarrow x \doteq z$
4. *Kongruenz 1:*
   $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \forall y_1 \ldots \forall y_n\ x_1 \doteq y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \doteq y_n \rightarrow f x_1 \ldots x_n \doteq f y_1 \ldots y_n$
5. *Kongruenz 2:*
   $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \forall y_1 \ldots \forall y_n\ x_1 \doteq y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \doteq y_n \rightarrow (R x_1 \ldots x_n \leftrightarrow R y_1 \ldots y_n)$

Beweis. Leichtes Nachrechnen. □

Lemma 4.4 ($\exists$-Quantorenaxiome)**.**
Sei ϕ eine Formel, t ein $\mathcal{L}$-Term und v eine Variable, die frei für t in ϕ ist. Dann ist

$$\phi^t_v \rightarrow \exists v \phi$$

allgemeingültig.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur und β eine beliebige Belegung für $\mathfrak{A}$.
Dann gilt $\mathfrak{A} \models \phi^t_v[\beta] \overset{3.5}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \phi[\beta^{t^{\mathfrak{A}}[\beta]}_v] \overset{\text{Def. } \mathfrak{A} \models \exists v \phi[\beta]}{\Rightarrow} \mathfrak{A} \models \exists v \phi[\beta]$. (Achtung „$\Leftarrow$“ gilt nicht!) □

Beispiel. Die Voraussetzung, dass v frei für t in ϕ ist, ist notwendig.
Betrachte $\phi = \forall y\ y \doteq x$, $t = y$, Variable $v = x$.
Dann ist $\forall y\ y \doteq y \to \exists x \forall y\ y \doteq x$ nicht allgemeingültig (falsch, wenn das Universum mindestens 2 Elemente hat).

Lemma 4.5 (Modus Ponens)**.**
Seien ϕ, ψ $\mathcal{L}$-Formeln. Wenn ϕ und $(\phi \to \psi)$ allgemeingültig sind, dann auch ψ.

Beweis. Leicht, da per Definition für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und Belegungen β für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models (\phi \to \psi)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\beta]$ und ($\mathfrak{A} \not\models \phi[\beta]$ oder $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$). Daher folgt $\Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$. □

Lemma 4.6 ($\exists$-Einführung)**.**
Seien ϕ, ψ Formeln und x eine Variable. Wenn x nicht *frei in ψ vorkommt, dann ist mit $\phi \to \psi$ auch*

$$\exists x \phi \to \psi$$

allgemeingültig.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur, β beliebige Belegung für $\mathfrak{A}$.
Angenommen es gilt $\mathfrak{A} \models \exists x \phi[\beta]$, d.h. es existiert $a \in A$ sodass $\mathfrak{A} \models \phi[\beta^a_x]$. Aus der Allgemeingültigkeit von $\phi \to \psi$ folgt, dass $\mathfrak{A} \models \psi[\beta^a_x]$. Da x nicht frei in ψ vorkommt, folgt aus dem Koinzidenzlemma (Satz 3.4), dass $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$. Damit gilt $\mathfrak{A} \models \exists x \phi \to \psi[\beta]$. □

Definition (Der Hilbertkalkül)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Eine $\mathcal{L}$-Formel ϕ heißt *beweisbar* (schreibe $\vdash_{\mathcal{L}} \phi$), wenn

(1) ϕ eine Tautologie ist,

(2) ϕ ein Axiom der Gleichheit ist,

(3) ϕ ein $\exists$-Quantorenaxiom ist, d.h. ϕ hat die Form $\psi^t_v \to \exists v \psi$,

(4) ϕ sich mit Hilfe von Modus Ponens aus zwei beweisbaren $\mathcal{L}$-Formeln ψ und $(\psi \to \phi)$ ergibt,

(5) ϕ sich mit Hilfe der $\exists$-Einführung aus einer beweisbaren $\mathcal{L}$-Formel $\psi \to \psi'$ ergibt, d.h. $\phi = \exists x \psi \to \psi'$.

Satz 4.7 (Gödelscher Vollständigkeitssatz)**.**
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Eine $\mathcal{L}$-Formel ϕ ist genau dann allgemeingültig, wenn sie beweisbar ist. Das heißt

$$\models \phi \ \Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{L}} \phi.$$

Bemerkung. Daraus folgt auch, dass $\vdash_{\mathcal{L}} \phi$ nicht von der konkreten Sprache $\mathcal{L}$ abhängt (da dies mit dem 2. Koinzidenzlemma (Satz 4.1) für $\models \phi$ gilt). Daher schreiben wir später für $\vdash_{\mathcal{L}} \phi$ auch $\vdash \phi$.

Beweis.

„$\Leftarrow$“: Wir haben wegen Lemmata 4.2 - 4.6 schon gezeigt, dass (induktiv) jede beweisbare Formel allgemeingültig ist.

„$\Rightarrow$“: Wir zeigen zunächst, dass wir uns im Beweis auf Aussagen anstelle von Formeln einschränken können. Dazu benutzen wir folgende Tatsachen, welche in den Übungen bewiesen werden.

Fakt. *(1) Wenn $\phi_1, \ldots, \phi_n$ beweisbare $\mathcal{L}$-Formeln sind und $(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \psi$ beweisbar ist, dann ist auch ψ beweisbar.*

(2) ($\forall$-Quantorenaxiome) Wenn ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel ist, t ein $\mathcal{L}$-Term und v eine Variable, die frei für t in ϕ ist, dann ist $\forall v \phi \to \phi_v^t$ beweisbar.

(3) ($\forall$-Einführung) Wenn ϕ und ψ $\mathcal{L}$-Formeln sind und v eine Variable ist, die nicht frei in ϕ vorkommt, dann ist mit $\phi \to \psi$ auch $\phi \to \forall v \psi$ beweisbar.

Lemma 4.8. *Sei $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel, C eine Menge von neuen Konstanten und $c_1, \ldots, c_n \in C$ paarweise verschieden. Dann gilt*

$$\vdash_{\mathcal{L} \cup C} \phi(c_1, \ldots, c_n) \text{ gdw. } \vdash_{\mathcal{L}} \phi(v_1, \ldots, v_n)$$

wobei $\mathcal{L} \cup C = (\mathcal{C}^{\mathcal{L}} \cup C, \mathcal{F}^{\mathcal{L}}, \mathcal{R}^{\mathcal{L}})$ die Sprache ist, welche $\mathcal{L}$ um die Konstanten in C erweitert und wir $\phi(c_1, \ldots, c_n)$ für $\phi(v_1, \ldots, v_n)^{c_1 \ldots c_n}_{v_1 \ldots v_n}$ schreiben.

Beweis von Lemma 4.8.

Definition. Eine endliche Folge von $\mathcal{L}$-Formeln, welche mit Hilfe der Axiome und Regeln des Hilbertkalküls konstruiert werden kann und mit einer Formel ψ endet, nennen wir einen *$\mathcal{L}$-Beweis von ψ*.

„$\Rightarrow$“: Sei $B(c_1, \ldots, c_n)$ ein $\mathcal{L} \cup C$-Beweis von $\phi(c_1, \ldots, c_n)$, wobei $c_1, \ldots, c_n$ alle neuen Konstanten aus C die im $\mathcal{L} \cup C$-Beweis $B(c_1, \ldots, c_n)$ vorkommen enthält. Seien $y_1, \ldots, y_n$ Variablen, die im Beweis $B(c_1, \ldots, c_n)$ nicht vorkommen und betrachte den $\mathcal{L}$-Beweis $B(y_1, \ldots, y_n)$ von $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ in dem jedes Vorkommen von c_i durch y_i ersetzt wurde für $1 \leq i \leq n$.
n-fache $\forall$-Einführung (siehe Fakt) liefert, dass

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \phi(y_1, \ldots, y_n) \ \mathcal{L}\text{-beweisbar}$$

ist. (Wähle Tautologie χ in der $y_1, \ldots, y_n$ nicht frei vorkommen. Dann ist $\chi \to \phi(y_1, \ldots, y_n)$ beweisbar nach Fakt (1) und wahl einer geeigneten Tautologie. $\overset{\forall\text{-Einf.}}{\Rightarrow} \chi \to \forall y_1 \ldots \forall y_n \phi(y_1, \ldots, y_n)$ ist beweisbar $\overset{\text{MP}}{\Rightarrow} \forall y_1 \ldots \forall y_n \phi(y_1, \ldots y_n)$ ist beweisbar.)
Wegen des n-fachen $\forall$-Quantorenaxioms (siehe Fakt) gilt

$$\vdash_{\mathcal{L}} \forall y_1 \ldots \forall y_n \phi(y_1, \ldots, y_n) \to \phi(v_1, \ldots, v_n)$$

und daher wegen Modus Ponens auch $\phi(v_1, \ldots, v_n)$.

„$\Leftarrow$“: Angenommen $\vdash_{\mathcal{L}} \phi(v_1, \ldots, v_n)$. Wegen n-facher $\forall$-Einführung gilt

$$\vdash_{\mathcal{L}} \forall v_1 \ldots \forall v_n \phi(v_1, \ldots, v_n).$$

Insbesondere gilt daher auch $\vdash_{\mathcal{L} \cup C} \forall v_1 \ldots \forall v_n \phi(v_1, \ldots, v_n)$. Daraus folgt mit dem n-fachen $\forall$-Quantorenaxiom, dass

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n \phi(v_1, \ldots, v_n) \to \underbrace{\phi(v_1, \ldots, v_n)^{c_1 \ldots c_n}_{v_1 \ldots v_n}}_{\phi(c_1, \ldots, c_n)}$$

$\mathcal{L} \cup C$-beweisbar ist. Also folgt mit MP, dass $\vdash_{\mathcal{L} \cup C} \phi(c_1, \ldots, c_n)$.

□

Definition. Eine $\mathcal{L}$-*Theorie* ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen.

Definition. Eine $\mathcal{L}$-Theorie T heißt *widerspruchfrei* oder *konsistent* gdw. es keine Aussagen $\phi_1, \dots \phi_n \in T$ gibt, welche sich „widersprechen“, d.h. für die

$$\vdash_{\mathcal{L}} \neg(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n)$$

gilt.

Definition. Ein *Modell von T* ist eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ in der alle Aussagen aus T gelten, d.h. $\mathfrak{A} \vDash \phi$ für alle $\phi \in T$. Wir schreiben auch $\mathfrak{A} \vDash T$.

Nun gilt für alle Aussagen ϕ,

$$\phi \text{ ist nicht beweisbar} \Leftrightarrow \{\neg\phi\} \text{ ist widerspruchsfrei.} \qquad (\star)$$

Denn: ϕ beweisbar $\Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\neg\phi) \Rightarrow \{\neg\phi\}$ ist nicht widerspruchsfrei.
$\{\neg\phi\}$ nicht widerspruchsfrei $\Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\neg\phi \wedge \cdots \wedge \neg\phi) \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}} \phi$.

Daher folgt der Vollständigkeitssatz aus dem folgenden Satz.

Satz 4.9. *Eine Theorie hat ein Modell gdw. sie widerspruchsfrei ist.*

Beweis von Satz 4.7 aus Satz 4.9. Es genügt zu zeigen, dass jede $\mathcal{L}$-Formel die allgemeingültig ist auch beweisbar (in der Sprache $\mathcal{L}$) ist. Sei ϕ eine $\mathcal{L}$-Aussage (wegen Lemma 4.8 reicht es wenn wir uns auf Aussagen beschränken). Angenommen $\vDash \phi$, d.h. ϕ gilt in allen $\mathcal{L}$-Strukturen. Dann gibt es keine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \vDash \neg\phi$. Also hat $T = \{\neg\phi\}$ kein Modell. Wegen Satz 4.9 ist $\{\neg\phi\}$ nicht widerspruchsfrei. Also ist ϕ beweisbar wegen $(\star)$. □

Bemerkung. Satz 4.9 ist sogar stärker als Satz 4.7, da die Theorie in Satz 4.9 unendlich sein kann.

Beweis von Satz 4.9.

„$\Rightarrow$“: ist leicht, da jede Theorie, die eine Modell hat, schon widerspruchsfrei sein muss.

„$\Leftarrow$“: Sei T eine widerspruchsfreie $\mathcal{L}$-Theorie. Wir wollen ein Modell für T konstruieren.

Bemerkung (Plan). Zuerst erweitern wir T zu einer Theorie T^*. Dann konstruieren wir eine $\mathcal{L} \cup C$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dots)$ mit Konstanten C für jedes $a \in A$, sodass T^* die Menge aller $\mathcal{L} \cup C$-Aussagen ist, die in $\mathfrak{A}$ gelten. Wir nennen T^* das *„vollständige Diagramm“* von $\mathfrak{A}$.

Für die Erweiterung von T zu T^* benötigen wir die folgenden Begriffe.

Definition. Eine $\mathcal{L} \cup C$-Theorie T^+ heißt *Henkintheorie* mit Konstantenmenge C gdw. es zu jeder $\mathcal{L} \cup C$-Theorie $\phi(x)$ eine Konstante $c \in C$ gibt mit

$$(\exists x \phi(x) \to \phi(c)) \in T^+.$$

Definition. Sei $\mathcal{K}$ eine Erweiterung von $\mathcal{L}$. Eine $\mathcal{K}$-Theorie T^* heißt *vollständig*, wenn sie widerspruchsfrei ist und wenn $\phi \in T^*$ oder $\neg\phi \in T^*$ für jede $\mathcal{K}$-Aussage ϕ gilt.

Bemerkung (Plan des Beweises).

Schritt 1: T ist in einer widerspruchfreien Henkintheorie T^+ enthalten.

Schritt 2: T ist in einer vollständigen Henkintheorie T^* enthalten (Erweiterung von T^+).

Schritt 3: T^* ist das vollständige Diagramm eines Modells (aus Konstanten), welches dadurch im wesentlichen (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist.

Schritt 1: T ist in einer widerspruchsfreien Henkintheorie T^+ enthalten.

Beweis von Schritt 1. Sei $\phi(x)$ eine $\mathcal{L}$-Formel und c eine neue Konstante (d.h. $c \notin \mathcal{C}^{\mathcal{L}}$). Dann ist $T \cup \{\exists x\phi(x) \to \phi(c)\}$ widerspruchsfrei, denn:

Angenommen es gibt eine $\mathcal{L}$-Aussage $\psi \in T$ mit $\vdash_{\mathcal{L}\cup\{c\}} \neg(\psi \wedge (\exists x\phi(x) \to \phi(c)))$. Dann folgt $\vdash_{\mathcal{L}\cup\{c\}} \neg\exists x\phi(x) \to \neg\psi$ und $\vdash_{\mathcal{L}\cup\{c\}} \phi(c) \to \neg\psi$ (mit geeigneter Tautologien) und mit Lemma 3.8 folgt $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\exists x\phi(x) \to \neg\psi$ und $\vdash_{\mathcal{L}} \phi(x) \to \neg\psi$. Aus letzterem folgt mit $\exists$-Einführung $\vdash_{\mathcal{L}} \exists x\phi(x) \to \neg\psi$. Daher folgt nun $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi$.

Wenn T widerspruchsfrei ist, kann es also keine $\psi_1, \dots, \psi_n \in T$ geben mit

$$\vdash_{\mathcal{L}\cup\{c\}} \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n(\exists x\phi(x) \to \phi(c))).$$

Mit diesem Verfahren können wir induktiv für jede $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x)$ eine Konstante c_ϕ einführen, sodass die erweiterte Theorie

$$T_1 = T \cup \{(\exists x\phi(x) \to \phi(c_\phi)) | \phi(x) \mathcal{L}\text{-Formel}\}$$

widerspruchsfrei ist. Dies wiederholen wir (abzählbar) unendlich oft: Führe für jede $\mathcal{L} \cup C_1$-Formel neue Konstanten ein. Dann erhalten wir eine $\mathcal{L} \cup C_1 \cup C_2$-Theorie T_2, usw. Schließlich ist

$$T^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$$

eine widerspruchsfreie Henkintheorie mit Konstantenmenge $C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$, denn:

Sei $\phi(x)$ beliebige $\mathcal{L} \cup C$-Formel. Da Formeln eine endliche Länge haben gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $\phi(x)$ eine $\mathcal{L} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$-Formel ist. Dann gilt $(\exists x\phi(x) \to \phi(c_\phi)) \in T_{n+1} \subseteq T^+$. □

Schritt 2: Sei $\mathcal{K}$ eine Erweiterung von $\mathcal{L}$. Jede widerspruchsfreie $\mathcal{K}$-Theorie T^+ lässt sich zu einer vollständigen $\mathcal{K}$-Theorie T^* erweitern.

Beweis von Schritt 2. Sei ϕ eine $\mathcal{K}$-Aussage. Angenommen die Theorien $T^+ \cup \{\phi\}$ und $T^+ \cup \{\neg\phi\}$ sind beide nicht widerspruchsfrei. D.h. es gibt Aussagen $\psi_1, \dots, \psi_n, \chi_1, \dots, \chi_m \in T^+$ sodass $\vdash_{\mathcal{K}} \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \phi)$, d.h.

$$\vdash_{\mathcal{K}} \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \vee \neg\phi \text{ bzw. } \vdash_{\mathcal{K}} \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \neg\phi$$

und $\vdash_{\mathcal{K}} \neg(\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_m \wedge \neg\phi)$, d.h.

$$\vdash_{\mathcal{K}} \neg(\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_m) \vee \underbrace{\neg\neg\phi}_{\phi} \text{ bzw. } \vdash_{\mathcal{K}} \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_m \to \phi.$$

Daraus folgt mit Hilfe einer geeigneten Tautologie, dass

$$\vdash_{\mathcal{K}} \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_m).$$

Dies widerspricht der Widerspruchsfreiheit von T^+.

Wir nehmen nun zur Vereinfachung an, dass wir alle $\mathcal{K}$-Aussagen als $\phi_0, \phi_1, \dots$ aufzählen können. Dann nehmen wir der Reihe nach entweder ϕ_i oder $\neg\phi_i$ zu T^+ hinzu und erhalten vollständige Theorie T^*. Die richtigen Methoden dies für allgemeine $\mathcal{K}$ zu beweisen lernen wir im Kapitel *Mengenlehre* kennen (Stichwort: Auswahlaxiom, Lemma von Zorn). Wir vertagen den Beweis im allgemeinen Fall bis dahin. $\square$

Definition. Sei $\mathcal{K}$ eine Sprache. Wir sagen ϕ *ist aus* T *ableitbar*, schreiben $T \vdash_{\mathcal{K}} \phi$, wenn es $\mathcal{K}$-Aussagen $\psi_1, \dots \psi_n \in T$ gibt sodass $\vdash_{\mathcal{K}} \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \phi$.

Definition. Eine Theorie T heißt *deduktiv abgeschlossen*, wenn für alle $\mathcal{K}$-Aussagen ϕ gilt, dass $T \vdash_{\mathcal{K}} \phi$ gdw. $\phi \in T$.

Beispiel. Wenn $\phi,\ \phi \to \psi \in T$, dann ist auch $\psi \in T$.

Bemerkung. Jede vollständige Theorie T^* ist deduktiv abgeschlossen.

Schritt 3: Jede vollständige Henkintheorie T^* hat ein Modell aus Konstanten, d.h. ein $\mathcal{L} \cup C$-Modell $\mathfrak{A}^* = (A, \mathcal{C}^{\mathfrak{A}^*} \cup C^{\mathfrak{A}^*}, \mathcal{F}^{\mathfrak{A}^*}, \mathcal{R}^{\mathfrak{A}^*})$ wobei C eine Menge von Konstantenzeichen ist, sodass $A = \left\{c^{\mathfrak{A}^*} | c \in C\right\}$. $\mathfrak{A}^*$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis von Schritt 3. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit:
Sei $\mathfrak{B}^* = (B, \mathcal{C}^{\mathfrak{B}^*} \cup C^{\mathfrak{B}^*}, \mathcal{F}^{\mathfrak{B}^*}, \mathcal{R}^{\mathfrak{B}^*})$ mit $B = \left\{c^{\mathfrak{B}^*} | c \in C\right\}$ ein zweites Modell aus Konstanten für T^*. Dann gilt für alle $\mathcal{L} \cup C$-Aussagen ϕ

$$\mathfrak{A}^* \models \phi \text{ gdw. } \phi \in T^* \text{ gdw. } \mathfrak{B}^* \models \phi. \tag{$\star$}$$

Insbesondere gilt also für $c, d \in \mathcal{C} \cup C$:

$$c^{\mathfrak{A}^*} = d^{\mathfrak{A}^*} \Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models c \doteq d \overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B}^* \models c \doteq d \Leftrightarrow c^{\mathfrak{B}^*} = d^{\mathfrak{B}^*}.$$

Daher ist $F : A \to B,\ F(\underbrace{c^{\mathfrak{A}^*}}_{\in A}) = \underbrace{c^{\mathfrak{B}^*}}_{\in B}$ eine Bijektion, welche die Interpretation der Konstanten respektiert.

Relationen werden respektiert: Sei $R \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} R^{\mathfrak{A}^*}({c_1}^{\mathfrak{A}^*}, \dots, {c_n}^{\mathfrak{A}^*}) &\Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models R(c_1, \dots, c_n) \\ &\overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B}^* \models R(c_1, \dots, c_n) \\ &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}^*}(\underbrace{{c_1}^{\mathfrak{B}^*}}_{=F({c_1}^{\mathfrak{A}^*})}, \dots, \underbrace{{c_n}^{\mathfrak{B}^*}}_{=F({c_n}^{\mathfrak{A}^*})}). \end{aligned}$$

Funktionen werden respektiert: Sei $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}^*}({c_1}^{\mathfrak{A}^*}, \ldots, {c_n}^{\mathfrak{A}^*}) = {c_0}^{\mathfrak{A}^*} &\Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models f(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_0 \\ &\overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B}^* \models f(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_0 \\ &\Leftrightarrow f^{\mathfrak{B}^*}({c_1}^{\mathfrak{B}^*}, \ldots, {c_n}^{\mathfrak{B}^*}) = {c_0}^{\mathfrak{B}^*}. \end{aligned}$$

Daher ist F eine Isomorphie zwischen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$.
Wir zeigen die Existenz eines Modells aus Konstanten $\mathfrak{A}^*$ für T^*. Wir wollen Konstanten $c^{\mathfrak{A}^*}$ für $c \in C$ finden für die gilt $c^{\mathfrak{A}^*} = d^{\mathfrak{A}^*}$ gdw. $c \doteq d \in T^*$. Das geht, wenn $c \sim d \Leftrightarrow c \doteq d \in T^*$ eine Äquivalenzrelation ist.

Behauptung. *$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv.*

Beweis. Reflexivität: 1. Axiom der Gleichheit: $\forall x\ x \doteq x$. Aus dem $\forall$-Quantorenaxiom folgt, dass $\vdash_{\mathcal{L} \cup C} c \doteq c$. Da T^* deduktiv abgeschlossen ist, gilt $c \doteq c \in T^*$.

Symmetrie: Ähnlich nur mit dem 2. Axiom der Gleichheit: $\forall x \forall y\ x \doteq y \to y \doteq x$.

Transitivität: Ähnlich nur mit dem 3. Axiom der Gleichheit: $\forall x \forall y \forall z\ x \doteq y \land y \doteq z \to x \doteq z$.

□

Wähle $A = \left\{ c^{\mathfrak{A}^*} | c \in C \right\}$ wobei $c^{\mathfrak{A}^*} = [c]_\sim := \{ d \in C \mid c \doteq d \in T^* \}$ die von c repräsentierte $\sim$-Äquivalenzklasse ist.
Es bleibt die Interpretationen von Relationszeichen, Funktionszeichen und den übrigen Konstantenzeichen in $\mathfrak{A}^*$ zu definieren.
Relationen: Für jedes $R \in \mathcal{R}$ definieren wir

$$R^{\mathfrak{A}^*}(c_1^{\mathfrak{A}^*}, \ldots c_n^{\mathfrak{A}^*}) \Leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in T^*.$$

Das ist wohldefiniert, denn angenommen $c_1^{\mathfrak{A}^*} = d_1^{\mathfrak{A}^*}, \ldots, c_n^{\mathfrak{A}^*} = d_n^{\mathfrak{A}^*}, R(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$, dann gilt auch $R(d_1, \ldots d_n) \in T^*$. Dies folgt aus dem 5. Axiom der Gleichheit

$$(\forall x_1 \ldots \forall x_n,\ \forall y_1 \ldots y_n\ x_1 \doteq y_1 \land \cdots \land x_n \doteq y_n \to (R x_1 \ldots x_n \leftrightarrow R y_1 \ldots y_n))$$

und der deduktiven Abgeschlossenheit von T^*.
Funktionen (und Konstanten): Sei F ein n-stelliges Funktionszeichen oder eine Konstante (d.h. $n = 0$) aus $\mathcal{L}$. Definiere

$$f^{\mathfrak{A}^*}(c_1^{\mathfrak{A}^*}, \ldots, c_n^{\mathfrak{A}^*}) = c_0^{\mathfrak{A}^*} \text{ gdw. } f(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_0 \in T^*,$$

wobei c_0 wie folgt definiert ist: Es gilt $\vdash_{\mathcal{L} \cup C} f(c_1, \ldots, c_n) \doteq f(c_1, \ldots, c_n)$ also folgt mit dem $\exists$-Quantorenaxiom $\vdash_{\mathcal{L} \cup C} \exists x\ f(c_1, \ldots, c_n) \doteq x$. Da T^* Henkintheorie ist, existiert $c_0 \in C$ sodass

$$(\exists x\ \underbrace{f(c_1, \ldots, c_n) \doteq x}_{\phi(x)} \to \underbrace{f(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_0}_{\phi(c_0)}) \in T^*.$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. $c_0^{\mathfrak{A}^*}$ ist eindeutig bestimmt. Angenommen es gilt $c_1 \doteq d_1, \ldots, c_n \doteq d_n,\ f(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_0,\ f(d_1, \ldots, d_n) \doteq d_0 \in T^*$. Aus dem 4. Axiom der Gleichheit und der deduktiven Abgeschlossenheit von T^* folgt $c_0 \doteq d_0 \in T^*$, also $c_0^{\mathfrak{A}^*} = d_0^{\mathfrak{A}^*}$.

Behauptung. $\mathfrak{A}^*$ *ist ein Modell für* T^**, d.h. für jede* $\mathcal{L} \cup C$*-Aussage* ϕ *gilt*

$$\phi \in T^* \Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models \phi.$$

Beweis der Behauptung. Wir betrachten zunächst die Auswertung von Termen t ohne Variablen und zeigen, dass

$$t^{\mathfrak{A}^*} = c^{\mathfrak{A}^*} \Leftrightarrow t \doteq c \in T^*. \tag{$\circ$}$$

Induktion über den Aufbau von t:

- t ist eine Konstante d aus C. Dann $t^{\mathfrak{A}^*} = d^{\mathfrak{A}^*} = c^{\mathfrak{A}^*}$ gdw. $d \doteq c \in T^*$ per Definition.
- t ist Variable entfällt
- $t = ft_1 \dots t_n$ und $t_1^{\mathfrak{A}^*} = c_1^{\mathfrak{A}^*}$ für $1 \leq i \leq n$ für f ist ein n-stelliges Funktionszeichen oder Konstante aus $\mathcal{L}$. Nach IV gilt: $t_1 \doteq c_1 \in T^*$ für alle $1 \leq i \leq n$. Aus dem 4. Axiom der Gleichheit (Lemma 4.3) folgt, dass $t \doteq c \in T^*$ gdw. $fc_1 \dots c_n \doteq c \in T^*$. Außerdem gilt

$$t^{\mathfrak{A}^*} = c^{\mathfrak{A}^*} \Leftrightarrow f^{\mathfrak{A}^*}(c_1^{\mathfrak{A}^*}, \dots, c_n^{\mathfrak{A}^*}) = c^{\mathfrak{A}^*} \overset{\text{Def. von } f}{\Leftrightarrow} fc_1 \dots c_n = c \in T^*.$$

Nun zeigen wir die Behauptung durch Induktion über den Aufbau der $\mathcal{L} \cup C$-Aussage ϕ. Es genügt hier, wenn wir uns in den ersten beiden Fällen auf Terme beschränken, die keine Variablen enthalten, weil wir die Induktionsvoraussetzung im letzten Fall ($\phi = \exists x \psi$) nur auf solche Terme (genauer: auf $\psi(c)$ für ein Konstantenzeichen c) anwenden wollen.

- $\phi = t_1 \doteq t_2$. Sei $t_i^{\mathfrak{A}^*} = c_i^{\mathfrak{A}^*}$ für $i \in \{1, 2\}$. Dann ist wegen ($\circ$) $t_i \doteq c_i \in T^*$ für $i \in \{1, 2\}$ daher $\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow c_1^{\mathfrak{A}^*} = c_2^{\mathfrak{A}^*} \Leftrightarrow c_1 \doteq c_2 \in T^* \overset{\text{ded. Abg. v. } T^*}{\Leftrightarrow} t_1 \doteq t_2 \in T^*$.
- $\phi = Rt_1 \dots t_n$. Sei $t_i^{\mathfrak{A}^*} = c_i^{\mathfrak{A}^*}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist wegen ($\circ$) $t_i \doteq c_i \in T^*$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und daher $\mathfrak{A}^* \models \phi \overset{\text{Def. von } R^{\mathfrak{A}^*}}{\Leftrightarrow} Rc_1 \dots c_n \in T^* \overset{4.3(5)}{\Leftrightarrow} \phi \in T^*$.
- $\phi = \neg \psi$. $\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \not\models \psi \overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \psi \notin T^* \overset{\text{Vollständigkeit von } T^*}{\Leftrightarrow} \phi \in T^*$.
- $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$. $\mathfrak{A}^* \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{A}^* \models \psi_1$ und $\mathfrak{A}^* \models \psi_2 \overset{IV}{\Leftrightarrow} \psi_1, \psi_2 \in T^* \overset{\text{ded. Abg. v. } T^*}{\Leftrightarrow} \underbrace{(\psi_1 \wedge \psi_2)}_{\phi} \in T^*$.
- $\phi = \exists x \psi$. Angenommen es gibt $c \in C$ mit $\psi(c) \in T^*$. Dann folgt $\exists x \psi \in T^*$ wegen deduktiver Abgeschlossenheit von T^*. Wenn andersherum $\exists x \psi \in T^*$ und $\underbrace{(\exists x \psi \to \psi(c)) \in T^*}_{\text{wahr, weil } T^* \text{ Henkintheorie}}$ dann folgt $\psi(c) \in T^*$.

Also

$$\phi \in T^* \text{ gdw. } \psi(c) \in T^* \text{ für ein } c \in C. \tag{$\star\star$}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* \models \phi \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A}^* \models \psi[c^{\mathfrak{A}^*}] \text{ für ein } c \in C \\ &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A}^* \models \psi(c) \text{ für ein } c \in C \\ &\overset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \quad \psi(c) \in T^* \text{ für ein } c \in C \\ &\overset{(\star\star)}{\Leftrightarrow} \quad \phi \in T^*. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

□

Hiermit sind Satz 4.9 und der Vollständigkeitssatz (Satz 4.7) bewiesen.

□

□

Definition. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, T eine $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ eine $\mathcal{L}$-Aussage.

(1) ϕ *ist in* T *beweisbar*, schreibe $T \vdash \phi$, wenn es $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ gibt sodass $\psi_1, \ldots, \psi_n \to \phi$ beweisbar ist.

(2) ϕ *folgt logisch aus* T, schreibe $T \vDash \phi$, wenn ϕ in allen Modellen von T gilt.

Korollar 4.10. *$T \vdash \phi$ gdw. $T \vDash \phi$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} T \nvdash \phi \quad &\Leftrightarrow \quad T \cup \{\neg\phi\} \text{ ist widerspruchsfrei} \\ &\overset{4.9}{\Leftrightarrow} \quad T \cup \{\neg\phi\} \text{ hat ein Modell} \\ &\Leftrightarrow \quad T \nvDash \phi. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.11 (Kompaktheitssatz).
Eine Theorie T hat genau ein Modell wenn jede endliche Teilmenge von T ein Modell hat.

Beweis.

„⇒“: ist trivial.

„⇐“: Angenommen jede endliche Teilmenge von T hat ein Modell, aber T hat kein Modell. Wegen Satz 4.9 ist T nicht widerspruchsfrei, es gibt also $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ sodass $\vdash \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$. $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq T$ ist endliche Teilmenge von T, die nicht widerspruchsfrei ist. Also hat $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ nach Satz 4.9 kein Modell. ↯

□

Definition. Eine Menge A heißt *(höchstens) abzählbar* gdw. es eine Injektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt und *abzählbar unendlich* gdw. es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt. Eine Sprache $\mathcal{L}$ heißt abzählbar gdw. die $\mathcal{C}^{\mathcal{L}} \cup \mathcal{F}^{\mathcal{L}} \cup \mathcal{R}^{\mathcal{L}}$ abzählbar ist. Eine Struktur $\mathfrak{A}$ für eine abzählbare Sprache $\mathcal{L}$ heißt abzählbar gdw. das Universum A abzählbar ist.

Korollar 4.12 (Satz von Löwenheim-Skolem, abwärts).
Wenn eine Theorie mit höchstens abzählbarer Sprache ein Modell $\mathfrak{A}$ hat, dann hat sie auch ein abzählbares Modell $\mathfrak{B}$.

Bemerkung. Man kann $\mathfrak{B}$ so konstruieren, dass $B \subseteq A$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis. Im Beweis von Satz 4.9 haben wir bereits ein solches abzählbares Modell konstruiert, da für eine abzählbare Sprache nur abzählbar viele Formeln ϕ existieren, also nur abzählbar viele Konstanten c_ϕ hinzugefügt wurden. □

Kapitel 5

Nichtstandard-Modelle der Peano-Arithmetik

Wir müssen uns zuerst auf eine Liste von Axiomen für natürliche Zahlen einigen. Fixiere Sprache $\mathcal{L}_Q = (\{0,1\}, \{+, \cdot, exp\}, \{<\})$.

Definition. Das *Axiomsystem* Q besteht aus folgenden Aussagen:

(Q1) $\forall n \;\; \neg(n+1 \doteq 0)$

(Q2) $\forall n\; \forall m\; (n+1 \doteq m+1 \to n \doteq m)$

(Q3) $\forall n\; n+0 \doteq n$

(Q4) $\forall n \forall m\; n+(m+1) \doteq (n+m)+1$

(Q5) $\forall n\; n \cdot 0 \doteq 0$

(Q6) $\forall n \forall m\; n \cdot (m+1) \doteq (n \cdot m) + n$

(Q7) $\forall n\; exp(n,0) \doteq 1$ (Schreibe auch n^0 für $exp(n,0)$.)

(Q8) $\forall n \forall m\; n^{m+1} \doteq n^m \cdot n$

(Q9) $\forall n \forall m\; (n < m+1 \leftrightarrow (n < m \vee n \doteq m))$

(Q10) $\forall n\; \neg(n < 0)$

(Q11) $\forall n \forall m\; (n < m \vee n \doteq m \vee m < n)$

Für viele Beweise benötigen wir außerdem das Konzept der Induktion.

Definition. Sei $\varphi(n, m_1, \cdots, m_k)$ eine $\mathcal{L}_Q$-Formel in der die Variablen $n, m_1, \cdots, m_k$ vorkommen. Dann ist das zu φ gehörige *Induktionsaxiom* $(\mathrm{Ind})_\varphi$

$$\begin{aligned}\forall m_1 \cdots \forall m_k ((\varphi(0, m_1, \cdots, m_k) \wedge \forall n (\varphi(n, m_1, \cdots, m_k) \to \varphi(n+1, m_1, \cdots, m_k))) \\ \to \forall n\; \varphi(n, m_1, \cdots, m_k)).\end{aligned}$$

Das *Induktionsschema* ist die (unendliche) Menge aller $(\mathrm{Ind})_\varphi$ für $\mathcal{L}_Q$-Formeln φ.

Definition. Q gemeinsam mit dem Induktionsschema heißt *Peano-Arithmetik* (kurz: PA).

In PA kann man zum Beispiel die Assoziativität und Kommutativität von $+$ und $\cdot$ beweisen. (Übung)
Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \{0,1\}, \{+,\cdot,exp\}, \{<\})$ das Standard-Modell der natürlichen Zahlen. Dann $\mathfrak{N} \models \mathrm{PA}$.

Lemma 5.1. *Sei* $\mathfrak{M} = (M, \left\{0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}\right\}, \left\{+^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, exp^{\mathfrak{M}}\right\}, \left\{<^{\mathfrak{M}}\right\})$ *eine* $\mathcal{L}_Q$*-Struktur mit* $\mathfrak{M} \models \mathrm{PA}$. *Dann enthält* $\mathfrak{M}$ *eine isomorphe Kopie von* $\mathfrak{N}$*, d.h. es gibt eine* $\mathcal{L}_Q$*-Struktur* $\overline{\mathfrak{M}} = (\overline{M}, \cdots)$ *sodass* $\overline{M} \subseteq M$ *und eine Bijektion* $\pi : \mathbb{N} \to \overline{M}$ *welche* $\mathfrak{N} \cong \overline{\mathfrak{M}}$ *bezeugt.*

Beweis. Definiere $\pi(0) = 0^{\mathfrak{M}}$ und für $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi(n+1) = \pi(n) +^{\mathfrak{M}} 1^{\mathfrak{M}}.$$

Sei $\overline{M}$ der Wertebereich von π, d.h. $\pi[\mathbb{N}] = \overline{M}$. Dann ist π per Definition surjektiv. π ist auch injektiv: Sei $\pi(m) = \pi(n)$ für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$. Dann liefert $(n-m)$-fache Anwendung von (Q2) in $\mathfrak{M}$, dass $\pi(n-m) = 0^{\mathfrak{M}}$. Wegen (Q1) muss dann $n - m = 0$, also $n = m$ gelten.
Mit (Q3)-(Q9) kann man induktiv (mit dem Induktionsschema in $\mathfrak{N}$) zeigen, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} \pi(n+m) & = & \pi(n) +^{\mathfrak{M}} \pi(m) \\ \pi(n \cdot m) & = & \pi(n) \cdot^{\mathfrak{M}} \pi(m) \\ \pi(exp(n,m)) & = & exp^{\mathfrak{M}}(\pi(n), \pi(m)) \\ n < m & \text{gdw.} & \pi(n) <^{\mathfrak{M}} \pi(m). \end{array}$$

Insbesondere sind $+^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, exp^{\mathfrak{M}}, <^{\mathfrak{M}}$ auf $\overline{M}$ wohldefiniert (das heißt es gilt zum Beispiel $+^{\mathfrak{M}} \restriction \overline{M} : \overline{M}^2 \to \overline{M}$). Also ist $\overline{\mathfrak{M}} := (\overline{M}, \{0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}\}, \{+^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, exp^{\mathfrak{M}}\}, \{<^{\mathfrak{M}}\})$ eine $\mathcal{L}_Q$-Struktur und wir haben $\mathfrak{N} \cong \overline{\mathfrak{M}}$. □

Sei $\pi_{\mathfrak{M}} : \mathbb{N} \to M$ die im Beweis von Lemma 5.1 definierte Abbildung. Dann sieht man leicht:

Satz 5.2. *Sei* $\mathfrak{M}$ *eine* $\mathcal{L}_Q$*-Struktur mit* $\mathfrak{M} \models \mathrm{PA}$. *Dann gilt* $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$ *gdw.* $\pi_{\mathfrak{M}}$ *surjektiv ist.*

Definition. Sei $\mathfrak{M} = (M, \cdots)$ eine $\mathcal{L}_Q$-Struktur mit $\mathfrak{M} \models \mathrm{PA}$ und $\mathfrak{M} \ncong \mathfrak{N}$. Die Elemente von M, welche im Wertebereich von $\pi_{\mathfrak{M}}$ liegen, heißen *Standard-Zahlen* von $\mathfrak{M}$. Die Elemente außerhalb des Wertebereichs von $\pi_{\mathfrak{M}}$ heißen *Nichtstandard-Zahlen* von $\mathfrak{M}$.

Bemerkung. (Q9) - (Q11) implizieren, dass wenn x eine Nichtstandard-Zahl von $\mathfrak{M}$ ist, dann gilt $\pi_{\mathfrak{M}}(n) <^{\mathfrak{M}} x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. x ist „unendlich groß“.

Definition. Die *Theorie von* $\mathfrak{N}$, $Th(\mathfrak{N})$, ist die Menge aller $\mathcal{L}_Q$-Aussagen φ sodass $\mathfrak{N} \models \varphi$. D.h. insbesondere $\mathfrak{N} \models Th(\mathfrak{N})$.

Satz 5.3. *Es existiert eine* $\mathcal{L}_Q$*-Struktur* $\mathfrak{M} = (M, \dots)$ *sodass* M *abzählbar ist und* $\mathfrak{M} \models Th(\mathfrak{N})$*, aber* $\mathfrak{M} \ncong \mathfrak{N}$.

Bemerkung. D.h. aus elementarer Äquivalenz folgt im Allgemeinen nicht Isomorphie.

Beweis von Satz 5.3. Anwendung des Kompaktheitssatzes (Korollar 4.11). Sei $\mathcal{L}_c$ die Sprache die aus $\mathcal{L}_Q$ und einem zusätzlichen Konstantenzeichen c besteht, d.h.

$$\mathcal{L}_c = (\{0, 1, c\}, \{+, \cdot, exp\}, \{<\}).$$

Betrachte die $\mathcal{L}_c$-Aussagen $\phi_n = \neg(\cdots((0 + \underbrace{1) + 1) + \cdots) + 1}_{n \text{ viele 1-er}} \doteq c$ und

$$T = Th(\mathfrak{N}) \cup \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei $\overline{T} \subseteq T$ endlich. Dann ist $\overline{T}$ erfüllbar, denn: $\overline{T} \subset Th(\mathfrak{N}) \cup \{\phi_n \mid n < n_0\}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\mathbb{N}, \{0, 1, n_0\}, \{+, \cdot, exp\}, \{<\}) \vDash \overline{T}$. Aus dem Kompaktheitssatz folgt nun, dass T selbst auch erfüllbar ist.
Sei $\mathfrak{M}' = (M, \{0^{\mathfrak{M}'}, 1^{\mathfrak{M}'}, c^{\mathfrak{M}'}\}, \{+^{\mathfrak{M}'}, \cdot^{\mathfrak{M}'}, exp^{\mathfrak{M}'}\}, \{<^{\mathfrak{M}'}\})$ ein Modell von T. Mit dem Satz von Löwenheim-Skolem (4.12) können wir annehmen, dass $\mathfrak{M}'$ abzählbar ist. Setze

$$\mathfrak{M} = (M, \{0^{\mathfrak{M}'}, 1^{\mathfrak{M}'}\}, \{+^{\mathfrak{M}'}, \cdot^{\mathfrak{M}'}, exp^{\mathfrak{M}'}\}, \{<^{\mathfrak{M}'}\}).$$

Dann gilt $\mathfrak{M} \vDash Th(\mathfrak{N})$. (Das Konstantenzeichen c wird in der Theorie $Th(\mathfrak{N})$ nicht benutzt.)
Angenommen $\pi_{\mathfrak{M}}: \mathbb{N} \to M$ ist surjektiv. Da $c^{\mathfrak{M}'} \in M$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\pi_{\mathfrak{M}}(n) = c^{\mathfrak{M}'}. \tag{$\star$}$$

Da $\mathfrak{M}' \vDash \phi_n$, gilt

$$\mathfrak{M}' \vDash \neg(\cdots((0 + \underbrace{1) + 1) \cdots) + 1}_{n\text{-fach}} \doteq c \tag{$\star\star$}$$

D.h.

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathfrak{M}}(n) &\overset{\text{Def. } \pi_{\mathfrak{M}}}{=} (\cdots((0^{\mathfrak{M}} +^{\mathfrak{M}} \underbrace{1^{\mathfrak{M}}) +^{\mathfrak{M}} 1^{\mathfrak{M}}) \cdots) +^{\mathfrak{M}} 1^{\mathfrak{M}}}_{n\text{-fach } 1^{\mathfrak{M}}} \\
&\overset{\text{Def. } \mathfrak{M}}{=} (\cdots((0^{\mathfrak{M}'} +^{\mathfrak{M}'} \underbrace{1^{\mathfrak{M}'}) +^{\mathfrak{M}'} 1^{\mathfrak{M}'}) \cdots) +^{\mathfrak{M}'} 1^{\mathfrak{M}'}}_{n\text{-fach } 1^{\mathfrak{M}'}} \\
&\overset{(\star\star)}{\neq} c^{\mathfrak{M}'} \\
&\overset{(\star)}{=} \pi_{\mathfrak{M}}(n). \quad \lightning
\end{aligned}$$

Also ist $\pi_{\mathfrak{M}}$ nicht surjektiv und daher wegen Satz 5.2 $\mathfrak{M} \not\cong \mathfrak{N}$. $\square$

Kapitel 6

Gödelscher Unvollständigkeitssatz

Satz 6.1 (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz). *Es gibt eine Aussage Φ in der Sprache $\mathcal{L}_Q$, sodass Φ im Standard-Modell*

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \{0,1\}, \{+, \cdot, exp\}, \{<\})$$

von PA wahr ist, es jedoch auch ein Nichtstandard-Modell $\mathfrak{M}$ von PA gibt, in welchem Φ nicht wahr ist. D.h. Φ ist mit Hilfe der Peano Arithmetik weder beweisbar noch widerlegbar.

Bemerkung. Die Nichtstandard-Zahlen sind *kein* Beispiel für Φ, da $\exists x \forall y\ x > y$ auch im Nichtstandard-Modell falsch und $\exists x \forall y \in \mathbb{N}\ x > y$ keine gültige Formel ist.

Beweis (von Kripke). Sei s eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, d.h. $s : \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \to \mathbb{N}$ mit Länge $lh(s) = n$ oder $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit unendlicher Länge $lh(s) = \infty$.
Schreibe s_k für das k-te Element von s, d.h. $s(k)$, falls $k < lh(s)$.
Wir betrachten zunächst ein einfacheres Beispiel für zwei Variablen. Sei s beliebig mit $2 \leq lh(s) \leq \infty$ und sei $\varphi(v_0, v_1)$ eine $\mathcal{L}_Q$-Formel in der genau v_0 und v_1 frei vorkommen.
Wir betrachten ein Spiel $G(s, \varphi)$ mit zwei Spielern I und II.

I	k	m_0	
II			m_1

I spielt $k < lh(s) - 1$ und $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_0 < s_k$,
dann spielt II eine natürliche Zahl $m_1 < s_{k+1}$.

Wer zuerst die Regeln verletzt, verliert; wenn sich beide an die Regeln halten, dann gewinnt II das Spiel $G(s, \varphi)$ gdw.

$$\mathfrak{N} \vDash \varphi(m_0, m_1),$$

sonst gewinnt I. (Hier ist $\mathfrak{N}$ wie immer das Standard-Modell).
Wir sagen II *hat eine Gewinnstrategie für $G(s, \varphi)$ bzw. s erfüllt* φ gdw.

$$\forall k < lh(s) - 1\ \forall m_0 < s_k\ \exists m_1 < s_{k+1}\ \mathfrak{N} \vDash \varphi(m_0, m_1).$$

Das kann man auch allgemeiner für mehr Variablen machen:
Sei $n \geq 1$, $\varphi(v_0, \dots, v_{2n-1})$ $\mathcal{L}_Q$-Formel mit freien Variablen genau $v_0, \dots, v_{2n-1}$ und $lh(s) \geq 2n$. Dann ist $G(s, \varphi)$

I	k_0	m_0		k_2	m_2		$\dots$	k_{2n-2}	m_{2n-2}	
II			m_1			m_3	$\dots$			m_{2n-1}

das Spiel mit den folgenden Regeln: $k_0 < lh(s) - 1$, $m_0 < s_{k_0}$, $m_1 < s_{k_0+1}$ und für alle $i < n - 1$ gilt $k_{2i} + 1 < k_{2i+2} < lh(s) - 1$, $m_{2i+2} < s_{k_{2i+2}}$, $m_{2i+3} < s_{k_{2i+2}+1}$.

Wer zuerst eine Regel verletzt verliert, wenn sich beide an alle Regeln halten, dann gewinnt II gdw.

$$\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, \ldots, m_{2n-1}).$$

Ansonsten gewinnt I.
Wir sagen wieder II *hat eine Gewinnstrategie für* $G(s, \varphi)$ bzw. s *erfüllt* φ gdw.

$$\begin{aligned}\forall k_0 < lh(s) - 1\ \forall m_0 < s_{k_0}\ \exists m_1 < s_{k_0+1} \ldots (\ldots \forall k_{2n-2}(k_{2n-4} + 1 < k_{2n-2} < lh(s) - 1 \\ \rightarrow \forall m_{2n-2} < s_{k_{2n-2}}\ \exists m_{2n-1} < s_{k_{2n-2}+1}\ \ \mathfrak{N} \models \varphi(m_0, m_1, \ldots, m_{2n-2}, m_{2n-1}))\ldots).\end{aligned}$$

Wir nennen eine endliche Folge s *gut* gdw. $s_0 > lh(s)$ und für alle $0 < i < lh(s)$ gilt $s_i > (s_{i-1})^{s_{i-1}}$. Das heißt umgangssprachlich, dass die Folge viel Platz lässt.

Behauptung 1. *Sei* $k \in \mathbb{N}$ *und seien* $k{+}1$ *Formeln* $\varphi_0(v_0, \ldots, v_{2n_0-1}), \ldots, \varphi_k(v_0, \ldots, v_{2n_k-1})$ *gegeben. Wenn alle* $k + 1$ *Aussagen*

$$\begin{gathered}\mathfrak{N} \models \forall m_0 \exists m_1 \ldots \forall m_{2n_0-2} \exists m_{2n_0-1} \varphi_0(m_0, \ldots, m_{2n_0-1}) \\ \vdots \\ \mathfrak{N} \models \forall m_0 \exists m_1 \ldots \forall m_{2n_k-2} \exists m_{2n_k-1} \varphi_k(m_0, \ldots, m_{2n_k-1})\end{gathered}$$

wahr sind, dann gibt es eine gute Folge s*, sodass* s *jedes* φ_l *für* $l \leq k$ *erfüllt.*

Beweis der Behauptung 1. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $z(m)$ das kleinste z, sodass für alle $l \leq k$, für alle $i < n_l$ und für alle $m_0, \ldots, m_{2i} < m$ gilt:
Wenn $\mathfrak{N} \models \exists m_{2i+1} \forall m_{2i+2} \ldots \exists m_{2n_l-1} \varphi_l(m_0, \ldots, m_{2i}, m_{2i+1}, \ldots, m_{2n_l-1})$, dann existiert ein $m_{2i+1} < z$ mit $\mathfrak{N} \models \forall m_{2i+2} \ldots \exists m_{2n_l-1} \varphi_l(m_0, \ldots, m_{2i+1}, \ldots, m_{2n_l-1})$. $z(m)$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ wohldefiniert (da es nur endlich viele Formeln φ_l, endlich viele Variablen m_i, $i < n_l$, und endlich viele „Parameter“ $m_0, \ldots, m_{2i} < m$ gibt).
Sei $n = max\,\{n_0, \ldots, n_k\}$ und sei s eine endliche Folge der Länge $m \geq 2n$, sodass $s_0 > m$ und für alle $0 < i < m$ gilt $s_i > (s_{i-1})^{s_{i-1}}$ (d.h. s ist gut) und $s_i \geq z(s_{i-1})$. Dann erfüllt s jede der Formeln $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$. □

Sei $(\varphi_m \mid m \in \mathbb{N})$ eine Aufzählung der Axiome von PA. Durch „redundante Umgestaltung“ können wir annehmen, dass φ_m logisch äquivalent zu einer Formel der Form

$$\forall v_0 \exists v_1 \ldots \forall v_{2m-2} \exists v_{2m-1} \psi_m(v_0, v_1, \ldots, v_{2m-2}, v_{2m-1})$$

ist, wobei ψ_m genau die Variablen $v_0, \ldots, v_{2m-1}$ jedoch keine Quantoren enthält. (Wir sagen φ und ψ sind *logisch äquivalent*, gdw. für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung β für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$.)
Sei $m \in \mathbb{N}$. Da alle φ_l, $l \in \mathbb{N}$, wahr im Standard-Modell $\mathfrak{N}$ sind, gibt es nach Behauptung 1 eine gute Folge s, sodass s jedes ψ_l, für $l \leq m$, erfüllt. Die Aussage Φ soll nun ausdrücken, dass für alle m eine gute Folge s existiert, sodass s jedes ψ_l für $l \leq m$ erfüllt.
Dazu müssen wir gute Folgen als natürliche Zahlen kodieren: Sei $s = (s_0, \ldots, s_{k-1})$ eine Folge der Länge k, dann kodiert $n = \prod\limits_{i \leq k} p_i^{s_i+1}$ die Folge s, wobei $p_0, \ldots, p_{k-1}$die ersten k Primzahlen sind.
Sei G die Menge aller Paare $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sodass n eine gute Folge s kodiert, welche alle Formeln ψ_l für $l \leq m$ erfüllt. Dann kann man zeigen, dass G über $\mathfrak{N}$ definierbar ist, d.h. es

existiert eine $\mathcal{L}_Q$-Formel $\Theta(v_0, v_1)$, sodass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ $(n, m) \in G$ gdw. $\mathfrak{N} \models \Theta(n, m)$. Nun sei

$$\boxed{\Phi = \forall v_1 \exists v_0\ \Theta(v_0, v_1)}.$$

Dann gilt wegen Behauptung 1, dass $\mathfrak{N} \models \Phi$. Wir wollen nun ein Modell von PA konstruieren, in dem Φ nicht gilt. Sei

$$\mathfrak{M} = (\mathbb{N}^*, \{0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}\}, \{+^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, exp^{\mathfrak{M}}\}, \{<^{\mathfrak{M}}\})$$

ein Nichtstandard-Modell von $Th(\mathfrak{N})$ wie in Satz 5.3. Sei $\pi_{\mathfrak{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ die zugehörige nicht surjektive Abbildung (Erinnerung: $\pi_{\mathfrak{M}}(0) = 0^{\mathfrak{M}}$, $\pi_{\mathfrak{M}}(n+1) = \pi_{\mathfrak{M}}(n) +^{\mathfrak{M}} 1^{\mathfrak{M}}$ für $n \in \mathbb{N}$). Wenn wir gegebenenfalls $\mathfrak{M}$ durch einen Isomorphismus umorganisieren, können wir annehmen, dass $\pi_{\mathfrak{M}} = id_{\mathbb{N}}$, d.h. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ und $\pi_{\mathfrak{M}}(n) = n$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Nichtstandard-Zahlen von $\mathfrak{M}$ sind dann genau die Zahlen in $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.
Sei $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ beliebig. Da $\mathfrak{M} \models Th(\mathfrak{N})$ und $\mathfrak{N} \models \Phi$, gilt $\mathfrak{M} \models \Phi$, also $\mathfrak{M} \models \forall v_1 \exists v_0\ \Theta(v_0, v_1)$. Insbesondere gilt also $\mathfrak{M} \models \exists v_0\ \Theta(v_0, N)$. Wir finden nun einen $<^{\mathfrak{M}}$ minimalen Zeugen S für dieses v_0, d.h. ein $S \in \mathbb{N}^*$, sodass $\mathfrak{M} \models \Theta(S, N) \wedge \forall n (n < S \to \neg\Theta(n, N))$. (Ein solcher minimaler Zeuge existiert immer, da im Standardmodell und folglich auch in $\mathfrak{M}$ die Aussage $\forall v_1 \exists v_0\, \Theta(v_0, v_1) \wedge \forall n (n < v_0 \to \neg\Theta(v_0, v_1))$ gilt.)
Nun muss S eine Nichtstandard-Zahl sein:
Sei s die von S kodierte Folge. Da $\mathfrak{M} \models \Theta(S, N)$ müssen $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n <^{\mathfrak{M}} 2 \cdot^{\mathfrak{M}} N\}$ Indizes für Folgenglieder von s sein. Da $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, folgt schon $\mathbb{N} \subset \{n \in \mathbb{N}^* \mid n <^{\mathfrak{M}} 2 \cdot^{\mathfrak{M}} N\}$. Da S die Folge s kodiert, gilt daher

$$\mathfrak{M} \models \text{„}p_n \text{ teilt } S\text{“ für alle } n \in \mathbb{N}$$

(p_n ist die n-te Primzahl). Also gilt $S \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ (d.h. S ist Nichtstandard-Zahl).
Sei

$$H = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \text{ es existiert } k \in \mathbb{N} \text{ mit } n <^{\mathfrak{M}} s_k\}.$$

Wir betrachten

$$\mathfrak{M} \restriction H = (H, \{0, 1\}, \{+^{\mathfrak{M}} \restriction H, \cdot^{\mathfrak{M}} \restriction H, exp^{\mathfrak{M}} \restriction H\}, \{<^{\mathfrak{M}} \restriction H\}).$$

Achtung: $\mathfrak{M} \restriction H$ muss nun kein Modell von $Th(\mathfrak{N})$ mehr sein, wir werden aber in Behauptung 3 zeigen, dass es ein Modell von PA ist.

Behauptung 2. *$\mathfrak{M} \restriction H$ ist eine $\mathcal{L}_Q$-Struktur.*

Beweis der Behauptung 2. Wir müssen zeigen, dass H unter den Operationen $+^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}$ und $exp^{\mathfrak{M}}$ abgeschlossen ist. Seien $n, m \in H$ mit $1 <^{\mathfrak{M}} n$ und $1 <^{\mathfrak{M}} m$ (sonst trivial). D.h. es existieren $k_n,\ k_m \in \mathbb{N}$ mit $n <^{\mathfrak{M}} s_{k_n}$ und $m <^{\mathfrak{M}} s_{k_m}$. Sei $k = max\{k_n, k_m\} \in \mathbb{N}$, dann $n, m <^{\mathfrak{M}} s_k$. Es gilt $n +^{\mathfrak{M}} m \leq^{\mathfrak{M}} n \cdot^{\mathfrak{M}} m \leq^{\mathfrak{M}} exp^{\mathfrak{M}}(n, m) <^{\mathfrak{M}} exp^{\mathfrak{M}}(s_k, s_k) <^{\mathfrak{M}} s_{k+1}$ (die letzte Ungleichung gilt, da $\mathfrak{M} \models$ „S ist eine gute Folge“). Also folgt $n +^{\mathfrak{M}} m,\ n \cdot^{\mathfrak{M}} m,\ exp^{\mathfrak{M}}(n, m) \in H$. □

Behauptung 3. *$\mathfrak{M} \restriction H \models PA$.*

Beweis der Behauptung 3. Wir wollen zeigen, dass für jede natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{M} \restriction H \models \varphi_m,$$

wobei $(\varphi_m \mid m \in \mathbb{N})$ die oben fixierte Aufzählung der Axiome von PA ist. Sei $0 < i \leq m$ und $u = (n_0, n_2, \ldots, n_{2i-2})$ eine Folge der Länge i von Elementen von H. Wir definieren

eine aufsteigende Folge $(k_0(u), k_2(u), \ldots, k_{2i-2}(u))$ von Elementen von $\mathbb{N}$ wie folgt: $k_0((n_0)) = k_0(u)$ ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $n_0 <^{\mathfrak{M}} s_k$ (existiert, da $n_0 \in H$) für $0 < j < i$ sei $k_{2j}(u)$ das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $k_{2j-2}(u) + 1 < k$ und $n_{2j} <^{\mathfrak{M}} s_k$ (existiert, da $n_{2j} \in H$). Dies wird gleich sicherstellen, dass sich Spieler I an die Regeln hält. Man sieht aus der Definition, dass $k_{2j}(u)$ tatsächlich nur von $u \restriction (2j) = (n_0, n_2, \ldots, n_{2j})$ abhängt.
Es gilt $\mathfrak{M} \models \Theta(S, N)$ und wegen $m <^{\mathfrak{M}} N$ (sogar $m \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$) auch $\mathfrak{M} \models \Theta(S, m)$. D.h. für jedes $n_0 \in H$ existiert ein $n_1 <^{\mathfrak{M}} s_{k_0((n_0))+1}$, sodass für jedes $n_2 \in H$ ein $n_3 <^{\mathfrak{M}} s_{k_2((n_0,n_2))+1}$ existiert, sodass ..., sodass für jedes $n_{2m-2} \in H$ ein $n_{2m-1} <^{\mathfrak{M}} s_{k((n_0,n_2,\ldots,n_{2m-2}}$)) + 1 existiert, sodass $\mathfrak{M} \models \psi_m(n_0, n_1, \ldots, n_{2m-2}, n_{2m-1})$. Die n_{2j+1} können z.B. als Antwort von Spieler II im Spiel $G(S, \psi_m)$ gemäß einer Gewinnstrategie für Spieler II im Modell $\mathfrak{M}$ gewählt werden.
Aber $n_0, n_1, \ldots, n_{2m-2}, n_{2m-1} \in H$. Insbesondere gilt $\mathfrak{M} \restriction H \models \psi_m(n_0, \ldots, n_{2m-1})$. Da $n_0, n_2, \ldots, n_{2m-2}$ beliebig aus H waren gilt sogar

$$\mathfrak{M} \restriction H \models \forall n_0 \exists n_1 \ldots \forall n_{2m-2} \exists n_{2m-1} \psi_m(n_0, \ldots, n_{2m-1}),$$

also $\mathfrak{M} \restriction H \models \varphi_m$. □

Behauptung 4. $\mathfrak{M} \restriction H \models \neg\Phi$.

Beweis der Behauptung 4. Da $\{n \in \mathbb{N}^* \ : \ n <^{\mathfrak{M}} 2 \cdot^{\mathfrak{M}} N\}$ Indizes für Folgenglieder von s sind und da $\mathfrak{M} \models$ „s ist gute Folge“, gilt $2 \cdot^{\mathfrak{M}} N <^{\mathfrak{M}} s_0$. (Dies benutzt die Eigenschaft von guten Folgen, dass $s_0 > lh(s)$.) Also gilt $N \in H$.
Wir wollen nun zeigen, dass

$$\mathfrak{M} \restriction H \models \neg \exists v_0 \Theta(v_0, N).$$

Angenommen nicht, d.h. es existiert $\bar{S} \in H$ mit $\mathfrak{M} \restriction H \models \Theta(\bar{S}, N)$. Da $\Theta(\bar{S}, N)$ die Form

$$„\exists \underbrace{\ k\ }_{\text{Schranke}} \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{nur noch beschränkte Quantoren}}“$$

hat (d.h. $\Theta(\bar{S}, N)$ ist eine Σ_1-Formel der Sprache von PA, siehe Übungen für die Definition von Σ_1-Formeln), gilt auch $\mathfrak{M} \models \Theta(\bar{S}, N)$.
Wegen der Minimalität von S gilt $S = \bar{S}$ oder $S <^{\mathfrak{M}} \bar{S}$, also gilt in jedem Fall $S \in H$, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $S <^{\mathfrak{M}} s_k$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{M} \models$ „${p_k}^{s_k+1}$ teilt S“ (da $S \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ die Folge s kodiert), gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $s_k <^{\mathfrak{M}} S$.
Es folgt insgesamt $S <^{\mathfrak{M}} s_k <^{\mathfrak{M}} S$ für ein $k \in \mathbb{N}$. ↯ □

Dies beweist den Unvollständigkeitssatz. □

Kapitel 7

Mengenlehre

Was ist eigentlich eine Menge? Beispiele: $\{1, 2, 3\}$, $\emptyset, \ldots$, die Menge der natürlichen Zahlen, $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m : n = 2m\}$.
Ist $R = \{a \mid a \notin a\}$ eine Menge? Wenn ja, dann gilt $R \in R$ gdw. $R \notin R$. $\lightning$. Also kann R keine Menge sein. (Russels Paradoxon)

7.1 Die ZFC Axiome

Wir benötigen eine Axiomatisierung der Mengenlehre, um solche Paradoxien zu vermeiden.

Definition. Das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre ZFC besteht aus folgenden Axiomen in der Sprache $\mathcal{L}_\in = (\emptyset, \emptyset, \{\in\})$.

- Das *Extensionalitätsaxiom*

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)) \tag{Ext}$$

- Das *Fundierungsaxiom*

$$\forall x (\exists y\ y \in x \to \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))) \tag{Fund}$$

  Abgekürzte Schreibweise: $\forall x (x \neq \emptyset \to \exists y \in x\ y \cap x = \emptyset)$

- Das *Paarmengenaxiom*
  Wir schreiben $z = \{x, y\}$ für $x \in z \wedge y \in z \wedge \forall u \in z (u = x \vee u = y)$

$$\forall x \forall y \exists z\ z = \{x, y\} \tag{Paar}$$

  Es folgt $\forall x \exists z\ z = \{x\}$.
  Man kann auch zeigen, dass das *geordnete Paar* $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ existiert, falls x, y existieren.

- Die *Existenz der leeren Menge*

$$\exists x \forall y\ \neg (y \in x) \tag{$\emptyset$}$$

- Das *Vereinigungsaxiom*
  Wir schreiben $y = \bigcup x$ für $\forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u \in x\ z \in u)$

$$\forall x \exists y\ y = \bigcup x \tag{Ver}$$

Beispiel. Mit (Paar) und (Ver) lässt sich die Existenz von $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$ zeigen (falls x, y existieren).

- Das *Potenzmengenaxiom*
  Wir schreiben $x \subseteq y$ für $\forall z \in x\ z \in y$ und $y = \mathcal{P}(x)$ für $\forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.
  $$\forall x \exists y\ y = \mathcal{P}(x) \tag{Pot}$$
  Beispiel. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

- Das *Aussonderungsschema*
  Sei φ eine $\mathcal{L}_\in$-Formel, die genau die freien Variablen $x, v_1, \ldots, v_n$ hat (insbesondere nicht b). Dann lautet das zu φ gehörende Aussonderungsaxiom
  $$\forall v_1 \ldots \forall v_n \forall a \exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x, v_1, \ldots, v_n))) \tag{Aus_φ}$$
  Schreibweise: $\forall v_1 \ldots \forall v_n \forall a \exists b\ b = \{x \in a \mid \varphi(x, v_1, \ldots, v_n)\}$
  Die (unendliche) Kollektion aller (Aus_φ) für alle solche Formeln φ bildet das Aussonderungsschema.

  Bemerkung. Würden wir b als freie Variable in φ zulassen, wäre
  $$\forall a \exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge x \notin b))$$
  erlaubt. Für $a \neq \emptyset$ und $x \in a$ gilt $x \in b \leftrightarrow x \notin b$. Das ergibt das gleiche Problem wie in Russells Paradoxon.

  Beispiel. Für $\varphi = x \in v_1$ ergibt (Aus_φ) die Existenz von $a \cap v_1 = \{x \in a \mid x \in v_1\}$

  Beispiel. Außerdem ergibt sich die Existenz von
  $x \times y = \{u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) \mid \exists a \exists b\ (a \in x \wedge b \in y \wedge u = (a, b))\}$

- Das *Ersetzungsschema*
  Sei φ eine $\mathcal{L}_\in$-Formel, die genau die freien Variablen $x, y, v_1, \ldots, v_n$ (insbesondere nicht y') hat. Dann lautet das zu φ gehörige Ersetzungsaxiom
  $$\begin{aligned} \forall a \forall v_1 \ldots \forall v_n (\forall x \in a \exists y' \forall y\ (y = y' \leftrightarrow \varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n)) \\ \rightarrow \exists b \forall y\ (y \in b \leftrightarrow \exists x \in a\ \varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n)) \end{aligned} \tag{Ers_φ}$$
  Die (unendliche) Menge aller Ersetzungsaxiome (Ers_φ) für alle solcher Formeln φ bezeichnen wir als Ersetzungsschema.

  Beispiel. $\forall x \in a\ \exists y' \forall y (y = y' \leftrightarrow \varphi)$ besagt, dass es zu jedem $x \in a$ *genau ein* y mit der Eigenschaft φ gibt. Wenn man nun z.B. $F(x)$ für dieses eindeutige y schreibt, dann besagt (Ers_φ), dass die Menge $b = \{F(x) \mid x \in a\}$ existiert.

- Das *Auswahlaxiom*
  $$\forall x (x \neq \emptyset \wedge \forall y \in x \forall y' \in x (y \cap y' \neq \emptyset \leftrightarrow y = y') \rightarrow (\exists z \forall y \in x \exists u\ z \cap y = \{u\})) \tag{AC}$$
  D.h.: Jede nichtleere Menge, die aus paarweisen disjunkten nichtleeren Mengen besteht, besitzt eine „Auswahlmenge“.

- Das *Unendlichkeitsaxiom*
  Wir wollen postulieren, dass eine Menge existiert, welche alle Mengen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ als Element enthält.
  Dabei schreiben wir (wie vorher) $x = y \cup z$ für $x = \bigcup\{x, z\}$ und $y = x + 1$ für $y = x \cup \{x\}$.

Definition. Eine Menge a heißt *induktiv* gdw. $\emptyset \in a$ und für jedes $x \in a$ gilt auch $x + 1 = x \cup \{x\} \in a$.

Nun besagt das Unendlichkeitsaxiom

$$\exists x(x \text{ ist induktiv}). \tag{∞}$$

ZFC$^{-\infty}$: (Ext), (Fund), (Paar), (Ver), (Pot), (Aus$_\varphi$), (Ers$_\varphi$) (für beliebige φ wie oben), (AC), ($\emptyset$)

ZFC: ZFC$^{-\infty}$ und (∞)

ZF: ZFC ohne (AC)

Bemerkung. ($\emptyset$) ist in ZFC redundant: Wegen (∞) gibt es eine Menge a und dann folgt die Existenz der leeren Menge aus (Aus$_{x \neq x}$), also $\emptyset = \{x \in a \mid x \neq x\}$.

Definition. Die *von Neumann-Zahlen* sind wie folgt definiert:
Wir schreiben 0 für $\emptyset$, 1 für $\{\emptyset\}$, 2 für $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\ldots$ und allgemein $n + 1$ für $n \cup \{n\}$.

Wir können $+$, $\cdot$, exp auf den von Neumann-Zahlen so definieren, dass PA gilt:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} n+0 & := & n & n\cdot(m+1) & := & (n\cdot m)+n \\ n+1 & := & n\cup\{n\} & n^0 & := & 1 \\ n\cdot 0 & := & 0 & n^{m+1} & := & n^m\cdot n \end{array}$$

$+$, $\cdot$, exp sind hieraus rekursiv definiert.
Wir schreiben $n < m$ gdw. $n \in m$ für von Neumann-Zahlen n, m.
Die *Menge ω der von Neumann Zahlen* ist der Durchschnitt aller induktiven Mengen ($\omega = \bigcap\{a \mid a \text{ induktiv}\}$, „$\omega$ entspricht $\mathbb{N}$“).

Bemerkung. Die Existenz von ω folgt aus (∞) und (Aus$_{\forall a(a \text{ induktiv} \rightarrow x \in a)}$).

Lemma 7.1. *ω ist induktiv.*

Beweis. $\emptyset \in \omega$, da $\emptyset$ Element jeder induktiven Menge ist.
Sei $x \in \omega$ und a beliebige induktive Menge. Dann gilt $x \in a$ und damit auch $x + 1 \in a$.
Da a beliebige induktive Menge war, folgt schon $x + 1 \in \omega$. $\square$

Es gibt keinen Grund nach ω aufzuhören zu zählen.

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\},\ \omega + 2,\ \omega + 3,\ \ldots\ldots\ ,\omega + \omega,\ \omega + \omega + 1,\ \ldots$$

Definition. Eine Menge x heißt *transitiv* gdw. für jedes $y \in x$ gilt, dass $y \subset x$.

Definition. Eine Menge x heißt *Ordinalzahl* gdw. x transitiv ist und für alle $y, z \in x$ gilt, dass $y \in z \ \vee\ y = z \ \vee\ z \in y$.

Satz 7.2. $(\omega, \{0, 1\}, \{+, \cdot, exp\}, \{<\}) \vDash \text{PA}$

Beweis.

(Q3)-(Q8) sind aus Definition von $+, \cdot, exp$ klar.

(Q1): $\forall n\ \neg(n+1=0)$
Klar, da $x+1 = x\cup\{x\} \neq \emptyset = 0$, da $x \in \{x\}$ für alle x.

(Q2): $\forall n \forall m\ (n+1 = m+1 \to n = m)$
Seien $x, y \in \omega$ mit $x+1 = x\cup\{x\} = y\cup\{y\} = y+1$. Angenommen $x \neq y$. Aus $x\cup\{x\} = y\cup\{y\}$ folgt, dass $x \in y\cup\{y\}$ und wegen $x \neq y$ sogar $x \in y$ (Ext). Analog folgt $y \in x\cup\{x\}$, also $y \in x$. Dies widerspricht (Fund) $\lightning$

(Q9): $\forall n \forall m\ (n < m+1 \leftrightarrow (n < m \vee n = m))$.
Seien $x, y \in \omega$ mit $x < y+1 = y\cup\{y\}$. Dann gilt $x \in y$ (d.h. $x < y$ oder $x \in \{y\}$ (d.h. $x = y$) (Ext). Dasselbe Argument liefert, dass $x \in y+1$, falls $x \in y$ oder $x = y$.

(Q10): $\forall n\ \neg(n < 0)$
Klar, da $x \notin \emptyset = 0$ für alle $x \in \omega$.

(Q11): $\forall n \forall m\ (n < m \ \vee\ n = m \ \vee\ m < n))$
Wir müssen zeigen, dass für $x, y \in \omega$, $x \in y \ \vee\ x = y \ \vee\ y \in x$. Es reicht zu zeigen, dass $A = \{x \in \omega \mid \forall y \in \omega\ (x \in y \ \vee\ x = y \ \vee\ y \in x)\}$ induktiv ist, da dann wegen $A \subseteq \omega$ schon $A = \omega$ folgt.

(Ind_φ): Sei $\varphi(v, v_0, \ldots, v_k$ eine $\mathcal{L}_Q$-Formel.
Seien $m_0, \ldots m_k \in \omega$ beliebig. Betrachte $A = \{n \in \omega \mid \varphi(n, m_0, \ldots, m_k)\}$. Die Voraussetzung des Induktionsaxioms (Ind_φ) liefert, das A induktiv ist. Wegen $A \subseteq \omega$ folgt daraus, dass $A = \omega$. Also gilt $\forall n\ \varphi(n, m_0, \ldots, m_k)$, die Schlussfolgerung von (Ind_φ).

□

7.2 Echte Klassen

Bemerkung. Die Kollektion aller Ordinalzahlen ist keine Menge, wir sagen sie ist eine *echte Klasse* und schreiben $\text{ORD} = \{\alpha \mid \alpha \text{ ist Ordinalzahl}\}$.
Denn: Angenommen ORD ist eine Menge. Dann ist ORD eine Ordinalzahl,
also $\text{ORD} \in \text{ORD}$ $\lightning$ (Fund)

Definition. Das *Mengenuniversum* $V = \{x \mid x \text{ ist Menge}\}$ ist die echte Klasse aller Mengen.

Wir haben auch für Klassen eine Axiomatisierung. Zwei Arten von Variablen: Klassen bezeichnen wir mit $X, Y, Z, \ldots, A, B, \ldots$, Mengen bezeichnen wir mit $x, y, z, \ldots, a, b, \ldots$.

Definition. Die *Bernays-Gödel Klassenaxiome BGC* bestehen aus:
(Ext), (Fund), (Paar), (Ver), (Pot), (∞) für Mengen wie in ZFC und

$$\forall X \forall Y \forall x\ ((x \in X \leftrightarrow x \in Y) \to X = Y) \tag{BG1}$$

$$\forall x \exists X\ x = X \tag{BG2}$$

$$\forall X (\exists Y\ X \in Y \leftrightarrow \exists x\ x = X) \tag{BG3}$$

Wenn φ eine Formel in der Sprache von BGC ist mit freien Variablen $x, X_1, \ldots, X_k$ und ohne Quantoren über Klassen, dann

$$\forall X_1 \ldots \forall X_k \exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow \varphi(x, X_1, \ldots X_k)) \tag{BG-Aus$_\varphi$}$$

Für jede (gegebenenfalls klassengroße) Funktionen F ist für jede Menge a das punktweise Bild

$$F[a] = \{F(x) \mid x \in a\} \tag{BG-Ers$_\varphi$}$$

eine Menge.

Es gibt eine (klassengroße) Funktion F, sodass

$$\forall x (x \neq \emptyset \to F(x) \in x) \tag{BG-C}$$

7.3 Exkurs: Ein Modell von ZFC$^{-\infty}$ aus PA

Wir wollen nun mit Hilfe der natürlichen Zahlen und PA ein Modell von ZFC$^{-\infty}$ konstruieren. Dazu fassen wir natürliche Zahlen als Mengen aus. Schreibe $n \in \mathbb{N}$ in *Dualdarstellung*, d.h. $n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} m_i \cdot 2^i \underbrace{=}_{Schreibweise} \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} m_i \cdot 2^i$ für $m_i \in \{0, 1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
(dann existieren nur endlich viele $i \in \mathbb{N}$ mit $m_i = 1$).
Wir definieren zweistellige Relation E auf $\mathbb{N}$ durch $(k, n) \in E$ gdw. $m_k = 1$ wenn $n = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} m_i 2^i$ die Dualdarstellung von n ist.

Beispiel.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 14 & = & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array},$$

d.h $(1, 14) \in E$ (bzw. $1E14$) und $2E14$, $3E14$, aber $0\not{E}14$, $4\not{E}14$, $\ldots$

Satz 7.3. $(\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \{E\}) \vDash ZFC^{-\infty}$.
Wir schreiben auch $(\mathbb{N}, E)$ für $(\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \{E\})$ (und analog für andere $\mathcal{L}_{ZFC}$-Strukturen).

Beweis.

- $(\mathbb{N}, E) \vDash (\emptyset)$: klar da $0 \in \mathbb{N}$.
- $(\mathbb{N}, E) \vDash$ (Ext): klar, da die Dualdarstellung einer natürlichen Zahl eindeutig ist.
- $(\mathbb{N}, E) \vDash$ (Fund): Für $k, n \in \mathbb{N}$, sodass $(\mathbb{N}, E) \vDash k \in n$ gilt $k < 2^k \leq n$.
  Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(\mathbb{N}, E) \vDash n \neq \emptyset$ (d.h. $n \neq 0$), sei $k < n$ das kleinste k' (im Sinne von $<$ auf $\mathbb{N}$) mit $(\mathbb{N}, E) \vDash k' \in n$.
  Dann gilt $(\mathbb{N}, E) \vDash k \cap n = \emptyset$ (da k sonst nicht minimal wäre).
  Dies zeigt $(\mathbb{N}, E) \vDash$ (Fund).
- $(\mathbb{N}, E) \vDash$ (Paar): Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $k = \begin{cases} 2^n + 2^m & \text{, falls } n \neq m \\ 2^n & \text{, falls } n = m \end{cases}$.
  Dann gilt $(\mathbb{N}, E) \vDash k = \{n, m\}$
- $(\mathbb{N}, E) \vDash$ (Ver): Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} m_i \cdot 2^i$. Für $i \in \mathbb{N}$ mit $m_i = 1$ sei $i = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} m_{i,k} \cdot 2^k$ die Dualdarstellung von i.
  Sei $X = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists i \; m_i = 1 = m_{i,k}\}$ und $m = \sum\limits_{k \in X} 2^k$. Dann gilt $(\mathbb{N}, E) \vDash m = \bigcup n$.

- $(\mathbb{N}, E) \vDash$ (Pot): Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n = \sum_{i\in\mathbb{N}} m_i \cdot 2^i$. Für $m \in \mathbb{N}$ mit $m = \sum_{i\in\mathbb{N}} m'_i \cdot 2^i$ gilt $(\mathbb{N}, E) \vDash m \subset n$ gdw. für alle $i:\ m'_i \leq m_i$ (d.h. $m'_i = 1 \Rightarrow m_i = 1$).
  Setze $I = \{i \in \mathbb{N} \mid m_i = 1\}$ und für $I^* \subset I$ sei $n_{I^*} = \sum_{i\in I^*} 2^{n_{I^*}}$.
  Nun setzte $m = \sum_{I^*\subset I} 2^{n_{I^*}}$.
  Dann gilt $(\mathbb{N}, E) \vDash m = \mathcal{P}(n)$.

- $(\mathbb{N}, E) \vDash (\text{Aus}_\varphi)$:
  Sei φ eine $\mathcal{L}_\in$-Formel wie in (Aus_φ) mit freien Variablen $x, v_1, \ldots, v_k$, seien $a, n_1, \ldots n_k \in \mathbb{N}$ und sei $a = \sum_{i\in\mathbb{N}} m_i \cdot 2^i$.
  Setze $b = \sum_{i\in X} 2^i$ mit $X = \{i \in \mathbb{N} \mid m_i = 1 \ \wedge\ (\mathbb{N}, E) \vDash \varphi(i, n_1, \ldots n_k)\}$.
  Dann gilt $(\mathbb{N}, E) \vDash b = \{i \in a \mid \varphi(i, n_1, \ldots, n_k)\}$.

- $(\mathbb{N}, E) \vDash (\text{Ers}_\varphi)$:
  Sei φ eine $\mathcal{L}_\in$-Formel wie in (Ers_φ) mit freien Variablen $x, y, v_1, \ldots, v_k$.
  Seien $n_1, \ldots, n_k, a \in \mathbb{N}$ und sei $a = \sum_{i\in\mathbb{N}} m_i \cdot 2^i$. Weiter setzen wir voraus, dass $(\mathbb{N}, E) \vDash \forall x \in a \exists y' \forall y (y = y' \leftrightarrow \varphi(x, y, n_1, \ldots, n_k))$. $\quad (\star)$
  Angenommen $\mathbb{N}, E) \vDash i \in a$, d.h. $m_i = 1$.
  Dann sei $l(i)$ das eindeutige $l \in \mathbb{N}$, sodass $(\mathbb{N}, E) \vDash \varphi(i, l, n_1, \ldots, n_k)$ (existiert wegen $(\star)$).
  Nun setzte $b = \sum_{i\in X} 2^{l(i)}$, wobei $X = \{i \in \mathbb{N} \mid (\mathbb{N}, E) \vDash i \in a\}$.
  Dann gilt $(\mathbb{N}, E) \vDash \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x \in a\ \varphi(x, y, n_1, \ldots, n_k))$.

- $(\mathbb{N}, E) \vDash$ (AC):
  Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(\mathbb{N}, E) \vDash n \neq \emptyset$, d.h. für $n = \sum_{i\in\mathbb{N}} m_i \cdot 2^i$ gilt, dass es mindestens ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $m_i = 1$.
  Für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $m_i = 1$ sei $i = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_{i,k} \cdot 2^k$.
  Weiter setzen wir voraus, dass $(\mathbb{N}, E) \vDash \forall y \in n \forall y' \in n (y \cap y' \neq \emptyset \leftrightarrow y = y')$. D.h. aus $i \neq j$ mit $m_i = 1 = m_j$ folgt, dass es *kein* $k \in \mathbb{N}$ gibt $m_{i,k} = 1 = m_{j,k}$. $\quad (\star\star)$
  Sei für $i \in \mathbb{N}$ mit $m_i = 1$ sei $k(i)$ das kleinste k mit $m_{i,k} = 1$.
  Insbesondere gilt dann für $i \neq j$ mit $m_i = 1 = m_j$, dass $k(i) \neq k(j)$ wegen $(\star\star)$.
  Nun setzt $z = \sum_{i\in X} 2^{k(i)}$, wobei $X = \{i \in \mathbb{N} \mid m_i = 1\}$.
  Dann gilt $(\mathbb{N}, E) \vDash \forall y \in n \exists n\ z \cap y = \{u\}$.

$\Rightarrow$ D.h. $(\mathbb{N}, E) \vDash \text{ZFC}^{-\infty}$. □

Bemerkung. $(\mathbb{N}, E) \nvDash (\infty)$.
Ansonsten gäbe es $a \in \mathbb{N}$, sodass $n < a$ für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

7.4 Das Auswahlaxiom

Definition. Eine *Auswahlfunktion* für eine beliebige Menge M ist eine Funktion $f:\ M \to \bigcup M$, sodass für alle $x \in M$ gilt $f(x) \in x$.

Notation. Wir schreiben Funktionen $f:\ A \to B$ auch als Mengen von geordneten Paaren $f = \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = y\}$.

Bemerkung. Falls $\emptyset \in M$, dann kann es keine Auswahlfunktion f für M geben, da $f(\emptyset) \in \emptyset$ gelten müsste.

Lemma 7.4. *Das Auswahlaxiom (AC) ist äquivalent zu der Aussage, dass zu jeder Menge $M \neq \emptyset$ mit $\emptyset \notin M$ eine Auswahlfunktion f für M existiert.*

Beweis.

„⇒“: Sei $M \neq \emptyset$ mit $\emptyset \notin M$, wir konstruieren eine Auswahlfunktion. Betrachte $N = \{\{(x,z) \mid z \in x\} \mid x \in M\}$. Dann ist N eine Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen. Sei A eine „Auswahlmenge“ wie in (AC) für N. Definiere $f: M \to \bigcup M$ durch $f(x) = z$ gdw. $(x,z) \in A$. Dann ist f eine Auswahlfunktion für M.

„⇐“: Sei N eine nichtleere Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen und sei f eine Auswahlfunktion für N. Dann ist $A = f''N$ (d.h. die Bildmenge von f) eine „Auswahlmenge“ für N.

□

Als Beispiel zeigen wir Lemma 7.5:

Lemma 7.5. *Seien A und B nichtleere Mengen. Wenn es eine Surjektion $f: A \to B$ gibt, dann existiert auch eine Injektion $g: B \to A$.*

Beweis. Sei $f: A \to B$ surjektiv, $B \neq \emptyset$. Für $y \in B$ sei $f^{-1}{}''\{y\} = \{x \in A \mid f(x) = y\}$. Dann gilt $f^{-1}{}''\{y\} \neq \emptyset$ da f surjektiv ist. Sei F eine Auswahlfunktion für die Menge $\{f^{-1}{}''\{y\} \mid y \in B\}$. Sei $g: B \to A$ definiert durch $g(y) = F(f^{-1}{}''\{y\})$ für $y \in B$. Dann ist g injektiv, da für $y, y' \in B$ mit $g(y) = g(y')$ folgt, dass $y = f(g(y)) = f(g(y')) = y'$. □

Definition. Sei M eine Menge und $R \subset M \times M$ eine zweistellige Relation auf M. Dann heißt R *fundiert* gdw. jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq M$ ein R-minimales Element besitzt, d.h. ein $z \in A$ existiert, sodass für alle $y \in A$ gilt $\neg yRz$ bzw. $(y,z) \notin R$.

Bemerkung. (Fund) aus ZFC besagt, dass für beliebige Mengen M die Relation $\in \restriction M$ eine fundierte Relation ist.

Definition. Sei M eine Menge. Eine *Wohlordnung* of M ist eine fundierte lineare Ordnung.

Bemerkung (Erinnerung)*.* Eine zweistellige Relation $<$ heißt *lineare Ordnung* gdw. sie antireflexiv (d.h. $\forall x\ \neg x < x$) und transitiv (d.h. $\forall x \forall y \forall z\ x < y \wedge y < z \to x < z$) ist und Vergleichbarkeit erfüllt (d.h. $\forall x \forall y\ x < y \vee x = y \vee y < x$).

Beispiel.

- $<$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Wohlordnung,
- $<$ auf $\mathbb{Z}$ ist keine Wohlordnung,
- $<$ auf $[0,1]$ ist keine Wohlordnung, betrachte z.B. $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\right\} \subseteq [0,1]$.

Bemerkung. Wenn $<$ eine Wohlordnung auf einer Menge M ist und $A \subset M$, $A \neq \emptyset$, dann gilt für jedes $<$-minimale $z \in A$, dass $z \leq y$ für alle $y \in A$, da $<$ linear ist. Insbesondere ist das $<$-minimale $z \in A$ *eindeutig.*

Lemma 7.6. *Sei $<$ eine Wohlordnung auf einer Menge M. Dann gibt es* keine *Folge $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ von Elementen $x_n \in M$, sodass $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Bemerkung. Dieses Lemma lässt sich leicht zeigen. Die Rückrichtung gilt auch und lässt sich mit (AC) zeigen (Übung).

Definition. Sei M eine Menge und $<$ eine Wohlordnung auf M. Dann heißt A ein *Anfangsstück von M bzgl.* $<$ gdw. für jedes $x \in A$ und jedes $y \in M$ mit $y < x$ auch $y \in A$ ist.

Lemma 7.7. *Sei M eine Menge und $<$ eine Wohlordnung auf M. Sei A ein Anfangsstück von M bzgl. $<$. Dann gilt entweder $A = M$ oder es gibt ein $x \in M$, sodass $A = \{y \in M \mid y < x\}$.*

Beweis. Wenn $A \neq M$, wähle x als das $<$-minimale Element von $M \setminus A$. Dann $A = \{y \in M \mid y < x\}$. □

Definition. Wenn $<_A, <_B$ lineare Ordnungen auf Mengen A bzw. B sind, dann heißt eine bijektive Funktion $\varphi: A \to B$ *Ordnungsisomorphismus* (bzgl. $<_A, <_B$) gdw. für alle $x, y \in A$ gilt, dass $x <_A y$ gdw. $\varphi(x) <_B \varphi(y)$.

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heißt auch ordnungstreue Funktion. Wir schreiben $\varphi: (A, <_A) \cong (B, <_B)$.

Lemma 7.8. *Sei $<$ eine Wohlordnung auf einer Menge M. Dann gibt es* kein *echtes Anfangsstück A von M, sodass ein Ordnungsisomorphismus $\varphi: (M, <) \cong (A, <\restriction A)$ existiert.*

Beispiel.

- $M = \mathbb{N},\ A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 1000\}$ mit der natürlichen Ordnung $<$. Hier existiert nicht einmal eine Bijektion zwischen M und A.
- $M = \omega + \omega,\ A = \omega$ mit der Ordnung $\in$. Hier existiert zwar eine Bijektion $M \to A$, aber keine ordnungstreue Abbildung.

Beweis von Lemma 7.8. Angenommen nicht. Dann gibt es nach Lemma 7.7 ein $x \in M$ mit $A = \{y \in M \mid y < x\}$, sodass außerdem für alle $y \geq x$ gilt, dass $\varphi(y) < y$ (da $\varphi(y) \in A$). Sei y_0 $<$-minimal in $\{y \in M \mid \varphi(y) < y\}$. Da φ ordnungstreu ist, gilt auch

$$\varphi(\underbrace{\varphi(y_0)}_{z}) < \underbrace{\varphi(y_0)}_{z}.$$

Wegen $z = \varphi(y_0) < y_0$ widerspricht dieser der Minimalität von y_0. ↯ □

Satz 7.9 (Wohlordnungssatz von Zermelo)**.**
Angenommen ZF. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Das Auswahlaxiom (AC) gilt.

(2) Zu jeder Menge A existiert eine Wohlordnung auf A.

Beweis.

(2) $\Rightarrow$ (1):

Sei $M \neq \emptyset$ mit $\emptyset \notin M$. Betrachte $A = \bigcup M = \{y : \exists x(x \in M \wedge y \in x)\}$ und sei $<$ eine Wohlordnung von A. Für $x \in M$ sei $f(x)$ das $<$-minimale Element von $x \subset A$. Dann ist $f: M \to \cup M$ eine Auswahlfunktion für M.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Für den Beweis zeigen wir zunächst

Lemma 7.10. *Seien M, N Mengen mit Wohlordnungen $<_M$ und $<_N$. Dann gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:*

(a) Es gibt einen Ordnungsisomorphismus $\varphi: (M, <_M) \cong (N, <_N)$.

(b) Es gibt ein Anfangsstück $A \subsetneq M$ von M und einen Ordnungsisomorphismus $\varphi: (A, <_M\restriction A) \cong (N, <_N)$.

(c) Es gibt ein Anfangsstück $B \subsetneq N$ von N und einen Ordnungsisomorphismus $\varphi: (M, <_M) \cong (B, <_N\restriction B)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst:

Behauptung. *Seien A, A' Anfangsstücke von M, B, B' Anfangsstücke von N und $\varphi: (A, <_M\restriction A) \cong (B, <_N\restriction B)$ und $\varphi': (A', <_M\restriction A') \cong (B', <_N\restriction B')$. Dann sind φ und φ' „verträglich", d.h. für jedes $x \in A \cap A'$ gilt $\varphi(x) = \varphi'(x)$.*

Beweis der Behauptung. Angenommen nicht. Sei x_0 $<_M$-minimal in $A \cap A'$ mit $\varphi(x_0) \neq \varphi'(x_0)$. Da φ ein Ordnungsisomorphismus ist, muss $\varphi(x_0)$ das $<_N$-minimale Element von $N \setminus \{\varphi(y) \mid y <_M x_0\}$ sein: Andernfalls sei $z \in N \setminus \{\varphi(y) \mid y <_M x_0\}$ mit $z <_N \varphi(x_0)$. Da $z <_N \varphi(x_0) \in B$ gilt auch $z \in B$ (da B ein Anfangsstück ist). Dann gibt es $x \in A$ mit $\varphi(x) = z$. Dann gilt $x \neq x_0$ und $\varphi(x) = z \notin \{\varphi(y) \mid y <_M x_0\}$, also $x_0 <_M x$. Aber $\varphi(x) = z <_N \varphi(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch, da φ ein Ordnungsisomorphismus ist. $\lightning$

Analog folgt, dass $\varphi'(x_0)$ das $<_N$-minimale Element von $N \setminus \{\varphi'(y) \mid y <_M x_0\}$ ist, da φ' ein Ordnungsisomorphismus ist.

Aus der Minimalität von x_0 (mit der Eigenschaft, dass $\varphi(x_0) \neq \varphi'(x_0)$) folgt, dass $\{\varphi(y) \mid y <_M x_0\} = \{\varphi'(y) \mid y <_M x_0\}$ und damit gilt $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0)$ (da beide das $<_N$ minimale Element von $N \setminus \{\varphi(y) \mid y <_M x_0\}$ bzw. $N \setminus \{\varphi'(y) \mid y <_M x_0\}$ sind). $\square$

Nun können wir Lemma 7.10 beweisen.

Betrachte

$$\tilde{\varphi} = \bigcup \{\varphi: (A, <_M\restriction A) \cong (B, <_N\restriction B) \mid A, B \text{ Anfangsstücke von } M \text{ bzw. } N \\ \text{und } \varphi \text{ Ordnungsisomorphismus}\}$$

Bemerkung. Aus der Behauptung folgt, dass diese φ „veträglich" sind, d.h. $\tilde{\varphi}$ ist selbst ein Ordnungsisomorphismus $\tilde{\varphi}: (\tilde{A}, <_M\restriction \tilde{A}) \cong (\tilde{B}, <_N \tilde{B})$ für Anfangsstücke $\tilde{A}, \tilde{B}$ von M bzw. N.

Dann muss aber $\tilde{A} = M$ oder $\tilde{B} = N$ gelten: Andernfalls sei x_0 $<_M$-minimal in $M \setminus \tilde{A}$ und y_0 $<_N$-minimal in $N \setminus \tilde{B}$. Dann ist auch $\tilde{\varphi} \cup \{(x_0, y_0)\}$ ein Ordnungsisomorphismus von $\tilde{A} \cup \{x_0\}$ auf $\tilde{B} \cup \{y_0\}$, wobei $\tilde{A} \cup \{x_0\}$ ein Anfangsstück von M und $\tilde{B} \cup \{y_0\}$ ein Anfangsstück von N ist. Dies widerspricht der Definition von $\tilde{\varphi}$, da $\tilde{\varphi} \cup \{(x_0, y_0)\} \subseteq \tilde{\varphi}$ gelten müsste. $\lightning$ $\square$

Nun zum Beweis von (1) $\Rightarrow$ (2) in Satz 7.9.

Sei M eine Menge. Wir wollen zeigen, dass es eine Wohlordnung $<$ auf M gibt. Wegen (AC) gibt es eine Auswahlfunktion $f: \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \to M$ (d.h. $f(A) \in A$ für alle $A \subseteq M,\ A \neq \emptyset$).

Sei nun $A \subseteq M,\ A \neq \emptyset$ und $<_A$ eine Wohlordnung auf A. Dann heißt $(A, <_A)$ *verträglich mit f* gdw. für alle $x \in A$ gilt, dass

$$x = f(M \setminus \{y \in A \mid y <_A x\}).$$

Behauptung. *Seien $A, B \subset M,\ A, B \neq \emptyset$ und $(A, <_A),\ (B, <_B)$ verträglich mit f. Dann gibt es ein Anfangsstück $\bar{A}$ von A mit $\bar{A} = B$ und $<_A \restriction \bar{A} = <_B$ oder es gibt ein Anfangsstück $\bar{B}$ von B mit $\bar{B} = A$ und $<_B \restriction \bar{B} = <_A$.*

Beweis der Behauptung. Nach Lemma 7.10 existiert zunächst ein Anfangsstück $\bar{A}$ von A mit Ordnungsisomorphismus $\varphi: (\bar{A}, <_A \restriction \bar{A}) \cong (B, <_B)$ oder ein Anfangsstück $\bar{B}$ von B mit Ordnungsisomorphismus $\varphi: (A, <_A) \cong (\bar{B}, <_B \restriction \bar{B})$.

Angenommen ersteres (ansonsten ist das Argument symmetrisch). Angenommen φ ist nicht die Identität. Dann gibt es ein $<_A \restriction \bar{A}$-kleinstes $x_0 \in \bar{A}$ mit $\varphi(x_0) \neq x_0$. Wie im Beweis von Lemma 7.10 gilt dann aber $\left\{y \in \bar{A} \mid y <_A x_0\right\} = \{y \in B \mid y <_B \varphi(x_0)\}$. Da $<_A$ und $<_B$ verträglich mit f sind, folgt

$$x_0 = f(M \setminus \left\{y \in \bar{A} \mid y <_A x_0\right\}) = f(M \setminus \{y \in B \mid y <_B \varphi(x_0)\}) = \varphi(x_0).$$

Dies ist ein Widerspruch. ↯ Also gilt $\varphi = id$, wie gewünscht. $\square$

Sei nun

$$\begin{aligned} A_0 = \bigcup\{A \subseteq M \mid \ & \text{es existiert eine Wohlordnung } <_A \text{ auf } A, \\ & \text{welche verträglich mit } f \text{ ist}\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} < \;=\; \bigcup\{<_A \subseteq M \times M \mid \ & <_A \text{ ist eine Wohlordnung auf einem } A \subseteq M, \\ & \text{welche verträglich mit } f \text{ ist}\}. \end{aligned}$$

Wegen der Behauptung gilt für alle $A \subset M$ mit $x \in A$ und für alle Wohlordnungen $<_A$ auf A welche verträglich mit f sind, dass

$$< \restriction \{y \in A \mid y < x\} \;=\; <_A \restriction \{y \in A \mid y <_A x\}.$$

Daraus folgt, dass $<$ eine lineare Ordnung auf A_0 ist.

Wir zeigen nun, dass $<$ auch eine Wohlordnung auf A_0 ist. Sei $B \subseteq A_0,\ B \neq \emptyset$. Zu zeigen ist, dass B ein $<$-minimales Element hat.

Sei $x \in B$ und seien $A \subset M$ und $<_A$ so, dass $x \in A,\ \{y \in B \mid y < x\} \subseteq A$ und $<_A$ eine mit f verträgliche Wohlordnung auf A ist. Dann ist entweder x bereits $<$-minimal in B oder $\{y \in B \mid y < x\} = \{y \in B \mid y <_A x\} \neq \emptyset$. Im zweiten Fall ist das $<_A$-minimale Element in $\{y \in B \mid y <_A x\}$ (welches existiert, da $<_A$ eine Wohlordnung auf A ist), auch $<$-minimal in $\{y \in B \mid y < x\}$. D.h. $<$ ist eine Wohlordnung auf A_0.

Es bleibt zu zeigen, dass $A_0 = M$. Angenommen nicht. Sei $x_0 = f(M \setminus A_0)$. Dann ist $< \cup \{(y, x_0) \mid y \in A_0\}$ (d.h. die lineare Ordnung auf $A_0 \cup \{x_0\}$, welche aus $<$ entsteht, wenn x_0 als größtes Element drangehängt wird) eine Wohlordnung auf $A_0 \cup \{x_0\} \subset M$, welche mit f verträglich ist. Aus der Definition von A_0 folgt dann $x_0 \in A_0$. $\lightning$

Dies beendet den Beweis des Wohlordnungssatzes (Satz 7.9). $\square$

Definition. Eine Relation $\leq$ auf einer Menge M heißt *partielle Ordnung* gdw. $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch (d.h. es gilt $\forall x \forall y\ x \leq y \wedge y \leq x \to x = y$) und transitiv ist.

Beispiel. Eine etwas ungewöhnliche Ordnung auf $\mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 3 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 5 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 7 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 9 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 11 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 13 \arrow[r, dash, "\leq"'] & \cdots \\
0 \arrow[ur, dash, "\leq"] \arrow[dr, dash, "\leq"'] & & & & & & & & \\
 & 2 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 4 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 6 \arrow[r, dash, "\leq"'] & 8 \arrow[r, dash, "\leq"'] & \cdots & & &
\end{tikzcd}$$

Definition. Das *Lemma von Zorn* ist die folgende Aussage: Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge mit einer partiellen Ordnung $\leq$, sodass für alle $B \subseteq M,\ B \neq \emptyset$, gilt, dass wenn $\forall x \in B\ \forall y \in B\ (x \leq y \vee y \leq x)$ dann hat B eine *obere Schranke*, d.h. dann existiert eine $z \in M$ mit $x \leq z$ für alle $x \in B$. Dann hat M ein *maximales Element*, d.h. es existiert ein $x_{max} \in M$, sodass $\nexists y \in M\ (x_{max} \leq y \wedge x_{max} \neq y)$.

Definition. Das *Hausdorffsche Maximalitätsprinzip* (HMP) ist die folgende Aussage: Sei F eine beliebige Menge und sei $\mathfrak{F}$ eine Menge von Teilmengen von F. Angenommen für alle $\bar{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{F}$ sodass $x \subseteq y$ oder $y \subseteq x$ für beliebige $x, y \in \bar{\mathfrak{F}}$ ist auch $\bigcup \bar{\mathfrak{F}} = \left\{a \in F \mid a \in x \text{ für ein } x \in \bar{\mathfrak{F}}\right\} \in \mathfrak{F}$. Dann existiert ein $x_{max} \in \mathfrak{F}$, sodass keine echte Obermenge von x_{max} ebenfalls ein Element von $\mathfrak{F}$ ist.

Notation. Wir nennen ein solches $\bar{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{F}$ mit $x \subseteq y$ oder $y \subseteq x$ für alle $x, y \in \bar{\mathfrak{F}}$ auch *Kette in* $\mathfrak{F}$.

Satz 7.11. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent (über ZF)*

(1) Das Auswahlaxiom (AC),

(2) Zu jeder Menge M gibt es eine Wohlordnung auf M,

(3) Das Lemma von Zorn,

(4) Das Hausdorffsche Maximalitätsprinzip (HMP)

Definition. Eine Ordinalzahl $\alpha > 0$ heißt *Nachfolgerordinalzahl* gdw. es eine Ordinalzahl β gibt mit $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$. Ansonsten heißt α *Limesordinalzahl*.

Beispiel.

- $1, 2, 3, \ldots, \omega + 1, \omega + 2, \ldots$ sind Nachfolgerordinalzahlen.
- $\omega, \omega + \omega, \ldots$ sind Limesordinalzahlen.

Beweis von Satz 7.11.

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Satz 7.9

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $(M, \leq)$ eine Menge mit einer partiellen Ordnung wie im Lemma von Zorn. Sei $f: \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \to M$ eine Auswahlfunktion für $\mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$, d.h. $f(b) \in b$ für alle $b \subseteq M,\ b \neq \emptyset$. Wir konstruieren induktiv eine „sehr lange $\leq$-Kette“ in M. Das eine solche Konstruktion funktioniert zeigen wir formal in Satz 7.12. Sei

$$a_0 = f(M)$$

(ein beliebiges Element von M),

$$a_{\alpha+1} = f(M \setminus \{x \in M \mid x \leq a_\alpha\}),$$

falls $M \setminus \{x \in M \mid x \leq a_\alpha\} \neq \emptyset$ für Nachfolgerordinalzahlen $\alpha + 1$ und

$$a_\lambda = f(M \setminus \{x \in M \mid x \leq a_\xi \text{ für ein } \xi < \lambda\}),$$

falls $M \setminus \{x \in M \mid x \leq a_\xi$ für ein $\xi < \lambda\} \neq \emptyset$ für Limesordinalzahlen λ.

Diese Konstruktion muss irgendwann abbrechen, da ORD eine echte Klasse ist und M eine Menge. Falls λ eine Limesordinalzahl ist, existiert für $\{a_\xi \mid \xi < \lambda\}$ nach Voraussetzung des Lemmas von Zorn eine obere Schranke, also gilt in diesem Fall $M \setminus \{x \in M \mid x \leq a_\xi$ für ein $\xi < \lambda\} \neq \emptyset$. Daher muss die Konstruktion in einem Nachfolgerschritt $\alpha + 1$ abbrechen. Das heißt aber es gibt ein α, sodass a_α ein $\leq$-maximales Element in M ist.

(3) $\Rightarrow$ (4): Klar, da falls $\bar{\mathfrak{F}}$ eine Kette bzgl. $\subseteq$ ist, $\bigcup \bar{\mathfrak{F}}$ eine obere Schranke bzgl. $\subseteq$ von $\bar{\mathfrak{F}}$ ist.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sei $M \neq \emptyset$ mit $\emptyset \notin M$. Wir wollen zeigen, dass es eine Auswahlfunktion f für M gibt. Betrachte $\mathfrak{F} = \{f: N \to \bigcup N \mid N \subseteq M,\ f \text{ Auswahlfunktion für } N\}$.

Bemerkung. $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, wir können zum Beispiel $N = \{x\}$ für ein $x \in M$ betrachten. Nach Wahl von M gilt $x \neq \emptyset$ und wir können $f: \{x\} \to x,\ f(x) = y$ für ein beliebiges $y \in x$ betrachten.

Sei $\bar{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{F}$ eine Kette in $\mathfrak{F}$. Dann ist $\bigcup \bar{\mathfrak{F}}$ eine Auswahlfunktion für eine Teilmenge von M (die einzelnen Auswahlfunktionen in $\bar{\mathfrak{F}}$ sind miteinander „verträglich“, da $\bar{\mathfrak{F}}$ eine Kette ist). Also gilt $\bigcup \bar{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Nach dem HMP existiert also ein $x_{max} \in \mathfrak{F}$, sodass keine echte Obermenge von x_{max} ebenfalls eine Auswahlfunktion für eine Teilmenge von M ist. Dann muss x_{max} eine Auswahlfunktion für M sein: Ansonsten gibt es ein $m \in M$, sodass x_{max} auf m nicht definiert ist. Dann wäre aber $x_{max} \cup \{(m, x_m)\}$ für ein beliebiges $x_m \in m$ eine Auswahlfunktion für eine Teilmenge von M mit $x_{max} \subsetneq x_{max} \cup \{(m, x_m)\}$. Das widerspricht der Maximalität von x_{max}. ↯

□

7.5 Ordinal- und Kardinalzahlen

Wir betrachten *Klassenfunktionen* wie zum Beispiel $F: \mathrm{ORD} \to V$. Wir beweisen nun, dass die rekursive Konstruktion über Ordinalzahlen im Beweis von Satz 7.11 ((1) $\Rightarrow$ (3)) funktioniert.

Satz 7.12 (Rekursionssatz)**.**
Zu jeder Klassenfunktion $G: V \to V$ *gibt es eine Klassenfunktion* $F: \mathrm{ORD} \to V$*, sodass für alle* $\alpha \in \mathrm{ORD}$

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha), \tag{$\star$}$$

wobei $F \restriction \alpha = \{(\xi, x) \in \alpha \times V \mid F(\xi) = x\}$*. Hierbei nennen wir* ($\star$) *die Rekursionsgleichung.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass es für alle $\beta \in \mathrm{ORD}$ genau eine (Mengen-)Funktion $f: \beta \to V$ gibt, die für alle $\alpha < \beta$ die Rekursionsgleichung ($\star$) erfüllt, d.h. $f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)$.
Eindeutigkeit: Angenommen es existiert noch eine solche Funktion $f': \beta \to V$. Dann gibt es ein kleinstes $\alpha < \beta$ mit $f(\alpha) \neq f'(\alpha)$. Dann gilt aber $f \restriction \alpha = f' \restriction \alpha$, also $f(\alpha) \overset{(\star)}{=} G(f \restriction \alpha) = G(f' \restriction \alpha) \overset{(\star)}{=} f'(\alpha)$. $\lightning$
Existenz: Induktion über β. Angenommen wir haben die Existenz für alle $\beta' < \beta$ schon gezeigt.

1. Fall: $\beta = 0$. Setze $f = \emptyset$.
2. Fall: $\beta = \beta' + 1$ für ein $\beta' \in \mathrm{ORD}$. Sei $f': \beta' \to V$ Funktion welche ($\star$) erfüllt und setze $f = f' \cup \{(\beta', G(f'))\}$.
3. Fall: β ist Limesordinalzahl. Nach (Ers) ist $X = \{f': \beta' \to V \mid \beta' < \beta,\ f' \text{ erfüllt } (\star)\}$ eine Menge, da jedes f' eindeutig durch das zugehörige β' bestimmt ist. Das selbe Argument liefert, dass $f = \bigcup X$ eine Funktion ist.

Nun sei $F = \bigcup\{f: \beta \to V \mid \beta \in \mathrm{ORD},\ f \text{ erfüllt } (\star)\}$. Dann ist F wie gewünscht. □

Nun können wir dies für die folgende Definition verwenden.

Definition. Die *von Neumann-Hierarchie* ist wie folgt definiert:

$$V_0 = \emptyset,$$

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$

für Nachfolgerordinalzahlen $\alpha + 1$ und

$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$$

für Limesordinalzahlen λ.

Bemerkung. Dann gilt

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ORD}} V_\alpha.$$

Wir haben schon gesehen, dass Ordinalzahlen durch $<$ (d.h. $\alpha < \beta$ gdw. $\alpha \in \beta$) wohlgeordnet sind. Dies motiviert den folgenden Satz.

Satz 7.13. *Jede Wohlordnung* $<$ *auf einer Menge* M *ist zu genau einer Ordinalzahl ordnungsisomorph. Wir nennen diese Ordinalzahl den* Ordnungstyp *von* $<$.

Beweis. Sei $(M, <_M)$ eine Menge mit einer Wohlordnung $<_M$. Wir suchen $\alpha \in \mathrm{ORD}$ und einen Ordnungsisomorphismus $\varphi: (\alpha, <) \to (M, <_M)$. Wir definieren $F: \mathrm{ORD} \to M \cup \{M\}$ durch

$$F(\beta) = \begin{cases} min_{<_M}(M \setminus F''\beta) & \text{, falls } M \nsubseteq F''\beta = \{F(\xi) \mid \xi \in \beta\} \\ M & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{$\circ$}$$

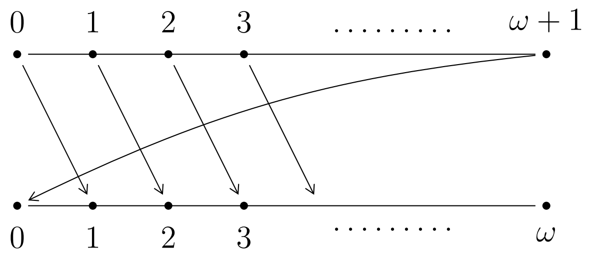
Der Rekursionssatz (7.12) garantiert, dass wir F so definieren können.

1. Fall: $M \notin F''\,\mathrm{ORD}$ (d.h. M ist nicht im Wertebereich von F). Dann ist F eine ordnungstreue Abbildung von ORD nach M, insbesondere also injektiv. Dann wäre aber wegen (Ers) $\mathrm{ORD} = F^{-1}{}''M$ eine Menge. Widerspruch. ↯

2. Fall: $M \in F''\,\mathrm{ORD}$. Sei $\alpha \in \mathrm{ORD}$ minimal mit $F(\alpha) = M$. Dann ist $F \restriction \alpha : \ \alpha \to M$ der gesuchte Ordnungsisomorphismus.

Somit fehlt nur mehr die Eindeutigkeit von α. Sei $f' : \ \alpha' \to M$ für $\alpha \in \mathrm{ORD}$ ein zweiter Ordnungsisomorphismus. Betrachte $F' = f' \cup \{(\beta, M) \mid \beta \geq \alpha'\}$. Dann erfüllt $F' : \ \mathrm{ORD} \to M \cup \{M\}$ die Rekursionsgleichung ($\circ$) und die Eindeutigkeit aus dem Beweis von Satz 7.12 (Rekursionssatz) liefert, dass $F = F'$. Also folgt $\alpha = \alpha'$. $\square$

Beispiel. Sei $f : \omega + 1 \to \omega$ die folgende Funktion: $f(n) = n + 1$ für alle $n \in \omega$ und $f(\omega) = 0$.



Dann ist f zwar eine Bijektion, aber kein Ordnungsisomorphismus.

Man kann zusammenfassend sagen, dass Ordinalzahlen die Wohlordnungen von Mengen charakterisieren. Wir wollen uns nun mit Kardinalzahlen beschäftigen, welche im Gegensatz dazu Mächtigkeiten von Mengen charakterisieren.

Definition. Zwei Mengen a und b heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion zwischen a und b gibt. Wir sagen in diesem Fall auch, dass a und b die gleiche *Kardinalität* haben. Die *Mächtigkeit* (oder auch *Kardinalität*) $|a|$ einer Menge a ist die kleinste Ordinalzahl, die gleichmächtig zu a ist, d.h. $|a| = min\{\alpha \in \mathrm{ORD} \mid \exists f : \ \alpha \to a \text{ bijektiv}\}$. (Dieses Minimum existiert, da ORD wohlgeordnet ist.)

Bemerkung. Zu jeder Menge a gibt es eine solche Ordinalzahl α, da jede Menge wohlgeordnet werden kann (mit (AC)) und jede Wohlordnung zu einer Ordinalzahl isomorph ist (Satz 7.9 und Satz 7.13).

Beispiel. $|\mathbb{N}| = |\omega| = \omega, \ |5| = 5, \ |\omega + 1| = \omega, \ |\omega + \omega| = \omega.$

Definition. Eine Ordinalzahl α heißt *Kardinalzahl* gdw. $|\alpha| = \alpha$.

Definition. Für eine Kardinalzahl κ heißt die kleinste Kardinalzahl $\mu > \kappa$ der *Nachfolger* von κ und wir schreiben $\mu = \kappa^+$.
Eine Kardinalzahl $\kappa \neq 0$ heißt *Nachfolgerkardinalzahl*, falls $\kappa = \nu^+$ für eine Kardinalzahl $\nu < \kappa$ gilt, ansonsten heißt κ *Limeskardinalzahl.*

Bemerkung (ACHTUNG!). $\omega + 1 \neq \omega^+$.

Lemma 7.14.

(1) Alle natürlichen Zahlen > 0 sind Nachfolgerkardinalzahlen.

(2) ω ist eine Limeskardinalzahl.

Beweis.

(1) Man sieht sofort, dass falls $f:\ n \to m$ eine Bijektion ist für $n, m \in \mathbb{N}$, dann $n = m$ gelten muss. Also $|n| = n$, d.h. n ist eine Kardinalzahl für $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $n + 1 = n^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ kann es keine Bijektion $f:\ n \to \omega$ geben. Also gilt $|\omega| = \omega$. Außerdem gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^+ = \omega$, also ist ω eine Limeskardinalzahl.

□

Lemma 7.15. *Sei X eine Menge von Kardinalzahlen. Dann ist $\bigcup X$ eine Kardinalzahl.*

Beweis. Man kann leicht nachrechnen, dass $\bigcup X$ eine Ordinalzahl ist. Wir müssen noch zeigen, dass es keine Ordinalzahl $\alpha < \bigcup X$ gibt, die gleichmächtig zu $\bigcup X$ ist.
Angenommen $\alpha < \bigcup X$, d.h. $\alpha \in \bigcup X$. Dann gibt es ein $\kappa \in X$ mit $\alpha \in \kappa$ bzw. $\alpha < \kappa$. Da κ eine Kardinalzahl ist gibt es keine Surjektion $f:\ \alpha \to \kappa$. Wegen $\kappa \in X$ gilt $\kappa \subseteq \bigcup X$, d.h. es kann auch keine Surjektion $g:\ \alpha \to \bigcup X$ geben. □

Das folgende Resultat wurde in den Übungen bereits gezeigt.

Lemma 7.16 (Satz von Cantor)**.**
Sei a eine Menge. Dann gilt $|a| < |\mathcal{P}(a)|$.

Hieraus folgt, dass es beliebig große Nachfolgerkardinalzahlen gibt, da $\kappa < \kappa^+ \leq |\mathcal{P}(\kappa)|$ für Kardinalzahlen κ gilt. Wegen Lemma 7.15 ist auch $\bigcup\{\kappa, \kappa^+, \kappa^{++}, \kappa^{+++}, \dots\}$ wieder eine Kardinalzahl, also gibt es auch beliebig große Limeskardinalzahlen.

Definition. Wir bezeichnen die (echte) Klasse aller Kardinalzahlen mit KARD. Außerdem schreiben wir $\aleph_0 = \omega$ (sprich „Aleph-0“) für die kleinste unendliche Kardinalzahl und für alle $\alpha > 0,\ \alpha \in \mathrm{ORD}$, $\aleph_\alpha$ für die kleinste Kardinalzahl κ, sodass $\kappa > \aleph_\beta$ für alle $\beta < \alpha$.

Beispiel. $\underbrace{\aleph_0}_{=\omega}, \underbrace{\aleph_1}_{=\omega^+}, \aleph_2, \aleph_3, \dots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots$

„Wir zählen die Kardinalzahlen mit Hilfe von Ordinalzahlen auf.“ Dabei ist $\aleph_1$ die erste überabzählbare Kardinalzahl.

Es stellt sich die Frage wie „groß“ ist $\aleph_1$? Gilt $\aleph_1 = |\mathbb{R}| \overset{\text{ÜA}}{=} |\mathcal{P}(\omega)|$? Dies ist die *Kontinuumshypothese* (von Cantor) und man kann zeigen, dass sie in ZFC weder beweisbar noch widerlegbar ist. Das heißt es gibt Modelle von ZFC in denen die Kontinuumshypothese wahr ist und andere Modelle von ZFC in denen die Kontinuumshypothese falsch ist.

Index

Literatur

[1] M. Müller. *Skript zur Aussagenlogik*. `http://www.logic.univie.ac.at/~muellem3/aussagenlogik.pdf`.

[2] R. Schindler. *Logische Grundlagen der Mathematik*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[3] M. Ziegler. *Mathematische Logik*. Mathematik Kompakt. Springer International Publishing, 2016.