VORLESUNG GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK

WINTERSEMESTER 2019

DR. SANDRA MÜLLER

Diese Vorlesung bietet eine Einführung in die mathematische Logik. Wir werden zunächst Aussagen- und Prädikatenlogik einführen und den Gödelschen Vollständigkeitssatz behandeln. Im Anschluss werden wir Nichtstandard-Modelle der natürlichen Zahlen betrachten und den berühmten ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz besprechen. Dann werden wir uns der Mengenlehre widmen und unter anderem das Auswahlaxiom in seinen Varianten diskutieren.

Zeiten: Freitags 8:00 - 10:15 Uhr im Hörsaal 13 (Oskar-Morgenstern-Platz 1).

Hier werden die Inhalte der einzelnen Vorlesungen kurz zusammengefasst. Dies dient nur zur groben Übersicht, keine Garantie auf Vollständigkeit!

Vorlesung 1 (Fr 4.10.) Übersicht über die Vorlesung, Alphabet, aussagenlogische Formeln, Eindeutige Lesbarkeit, aussagenlogische Belegung, Erfüllbarkeit, Koinzidenzlemma, Allgemeingültigkeit, Kompaktheitssatz der Aussagenlogik (ohne Beweis)

Vorlesung 2 (Fr 11.10.) Sprachen, Strukturen, Isomorphie von Strukturen, $\mathcal{L}$-Terme, Eindeutige Lesbarkeit von Termen (Beweis Übungsaufgabe), $\mathcal{L}$-Formeln, Eindeutige Lesbarkeit von Formeln (ohne Beweis), Belegungen, Erfüllbarkeit, freie Variablen, Koinzidenzlemma (Beweis nächste Woche)

Vorlesung 3 (Fr 18.10.) Koinzidenzlemma, Aussagen, Elementare Äquivalenz, Notation für Substitutionen, Substitutionslemma, Allgemeingültigkeit, 2. Koinzidenzlemma, Tautologien, Tautologien sind allgemeingültig

Vorlesung 4 (Fr 25.10.) Axiome der Gleichheit, $\exists$-Quantorenaxiome, Modus Ponens, $\exists$-Einführung, Hilbertkalkül, Diskussion Vollständigkeitssatz, Beginn Beweis des Vollständigkeitssatzes: Ausreichend den Satz für Aussagen zu zeigen, Theorien, widerspruchsfreie Theorien, Modelle, Beweis des Vollständigkeitssatzes aus Satz 4.9

Vorlesung 5 (Fr 08.11.) Fortsetzung des Beweises des Vollständigkeitssatzes: Henkintheorien, vollständige Theorien, Plan des Beweises, Schritt 1, Schritt 2, Schritt 3 im Beweis des Vollständigkeitssatzes, insb. Eindeutigkeit eines Modells aus Konstanten und Definition des Universums des Modells $\mathfrak{A}^*$

Date: 16. Januar 2020.

Vorlesung 6 (Fr 15.11.) Ende des Beweises von Schritt 3 im Beweis des Vollständigkeitssatzes, insb. restliche Definition von $\mathfrak{A}^*$ und Beweis, dass $\mathfrak{A}^*$ ein Modell von T^* ist. Kompaktheitssatz, Definition von Abzählbarkeit, Satz von Löwenheim-Skolem, Definition Q, PA, Diskussion Nichtstandard-Modelle von PA (Anwendung des Kompaktheitssatzes)

Vorlesung 7 (Fr 22.11.) Diskussion des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes (ohne Beweis, für einen Beweis siehe Skript), Diskussion der Axiome von ZFC (Formale Axiome und Beispiele), Definition Menge der von-Neumann-Zahlen ω, Definition Ordinalzahl

Vorlesung 8 (Fr 29.11.) $(\omega, \{0,1\}, \{+, \cdot, exp\}, \{<\})$ ist ein Modell von PA, ein Modell von ZFC$^{-\infty}$ aus PA, Klassen, BGC Axiome für Klassen, das Auswahlaxiom, Auswahlfunktionen, Lemma 7.5

Vorlesung 9 (Fr 6.12., Zwischentest in den Übungen) Wohlordnungen, Ordnungsisomorphismen, Wohlordnungssatz von Zermelo

Vorlesung 10 (Fr 13.12.) Beispiele für Wohlordnungen, Beweis des Wohlordnungssatzes von Zermelo, das Lemma von Zorn, das Hausdorffsche Maximalitätsprinzip, Beweis von Satz 7.11 außer (2) $\Rightarrow$ (3)

Vorlesung 11 (Fr 10.01.) Nachfolger- und Limesordinalzahlen, Beweis von (1) $\Rightarrow$ (3) in Satz 7.11, Rekursionssatz, die V_α Hierarchie, Jede Wohlordnung ist zu genau einer Ordinalzahl isomorph, Mächtigkeit/Kardinalität einer Menge, Kardinalzahlen, alle natürlichen Zahlen und ω sind Kardinalzahlen

Vorlesung 12 (Fr 17.01.) Satz von Cantor, es gibt eine echte Klasse von Kardinalzahlen, $\aleph$ Notation, Kontinuumshypothese, Kardinalzahlarithmetik, Satz von Hessenberg

Klausur (Fr 24.01.)

Klausureinsicht (Do 30.01.) Von 14:30 bis 15:30 in meinem Büro.

Literatur

[Sch09] Schindler, R.: *Logische Grundlagen der Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg, 2009 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 9783540959328

[Zie16] Ziegler, M.: *Mathematische Logik*. Springer International Publishing, 2016 (Mathematik Kompakt). – ISBN 9783319441801