Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Nicht-Beweisbarkeit und unendliche Spiele

Why logicians like to play games.

Sandra Uhlenbrock

12.11.2013

Spiele in der Mengenlehre

Definition (Gale/Stewart 1953)

Sei $A \subset 2^{\mathbb{N}}$. Mit $G(A)$ bezeichnen wir das folgende Spiel

I	i_0		i_2	$\dots$
II		i_1		i_3 $\dots$

für $i_n \in \{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Wir sagen Spieler I gewinnt das Spiel wenn $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. Andernfalls gewinnt Spieler II.

Wir sagen $G(A)$ (oder A selbst) ist **determiniert** genau dann, wenn einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Welche Spiele sind determiniert?

Theorem (Gale/Stewart)

(AC) Sei $A \subset 2^{\mathbb{N}}$ offen oder abgeschlossen. Dann gibt es in $G(A)$ für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie.

Theorem (Gale/Stewart)

Unter Annahme des Auswahlaxioms (AC) gibt es eine Menge von reellen Zahlen, für die es keine Gewinnstrategie gibt.

Was ist mit den Mengen "dazwischen"?

- Für Borel Mengen kann man (in ZFC) beweisen, dass es immer eine Gewinnstrategie geben muss.
- Für analytische und projektive Mengen kann man diese Aussage weder beweisen noch widerlegen.
- Für beliebige Mengen widerspricht diese Aussage den zugrunde liegenden Axiomen (ZFC).

Ein anderer Ansatz

Definition

Wir sagen A ist Wadge-reduzierbar auf B ($A \leq_W B$) genau dann, wenn

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \text{ für eine stetige Funktion } f : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}.$$

Wir sagen A und B sind Wadge-vergleichbar genau dann, wenn endweder $A \leq_W B$ oder $B \leq_W 2^{\mathbb{N}} \setminus A$.

Theorem (Wadge)

Angenommen für jede Menge gibt es eine Gewinnstrategie. Seien $A, B \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Dann sind A und B Wadge-vergleichbar.

Wie sieht es mit der anderen Richtung aus?

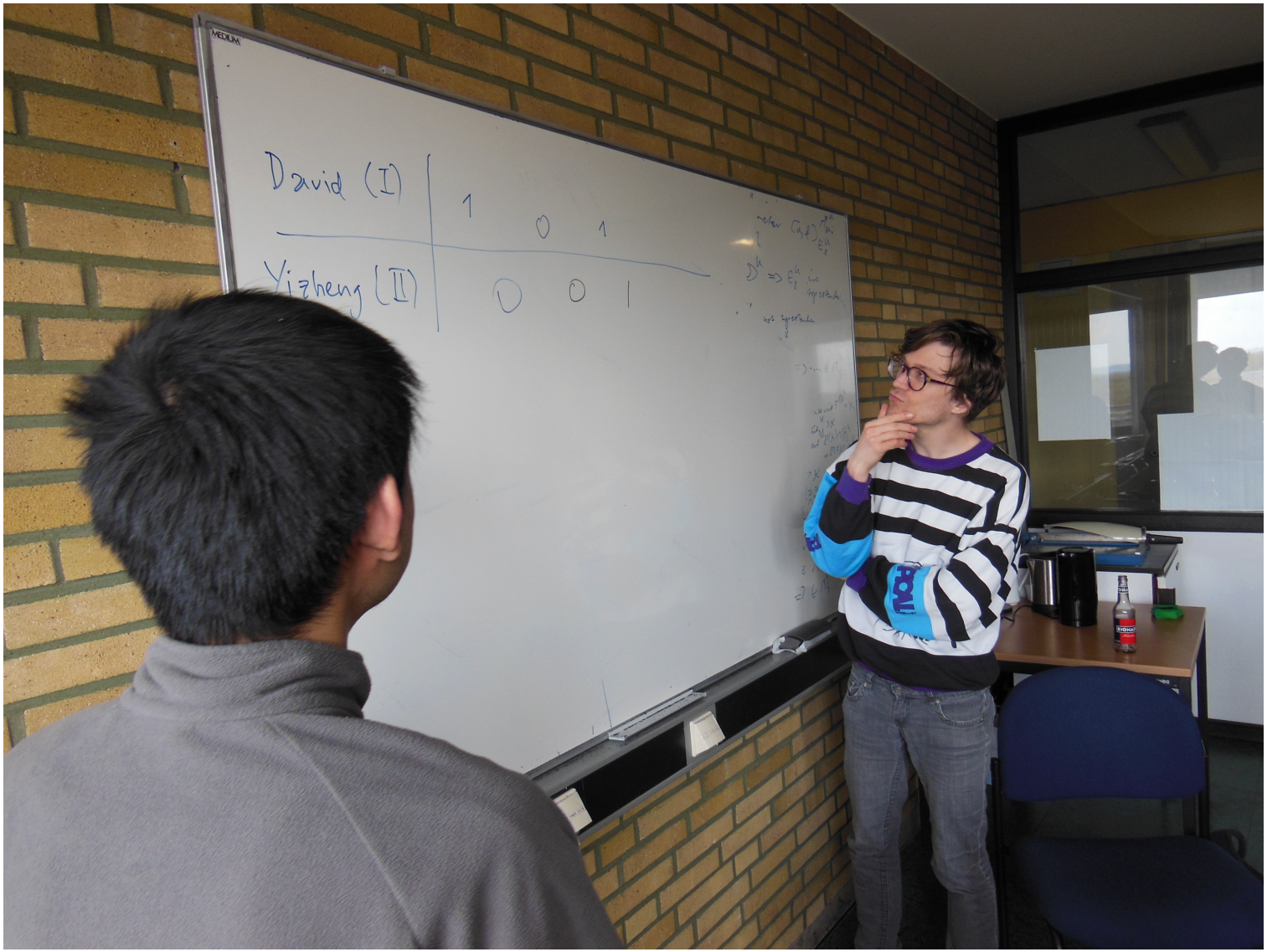
Betrachten wir die Situation für projektive Mengen.

- Die Existenz von Gewinnstrategien für projektive Mengen impliziert Wadge-Vergleichbarkeit für projektive Mengen.
- Die andere Richtung ist ein bekanntes offenes Problem.
- Wieso ist diese Frage interessant?
  Ein Beweis dieser Aussage wäre der erste Beweis von Gewinnstrategien für projektive Mengen aus einer Aussage, die ausschließlich projektive Mengen benutzt.

Fragestellungen in der modernen Mengenlehre

- Beweis der Äquikonsistenz von Aussagen, die im zugrunde liegenden Axiomensystem (ZFC) nicht beweisbar sind.
- Analyse wie sich das "Universum" verändert, wenn man Aussagen zum zugrunde liegenden Axiomensystem hinzufügt.
  Zum Beispiel: Welche Aussagen gelten, wenn man annimmt, dass jede Menge von reellen Zahlen eine Gewinnstrategie besitzt?

Ready to play?



For reference see Akihiro Kanamori "The higher infinite".