VORLESUNG GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK

SOMMERSEMESTER 2017

DR. SANDRA UHLENBROCK

Diese Vorlesung bietet eine Einführung in die mathematische Logik. Wir werden zunächst Aussagen- und Prädikatenlogik einführen und den Gödelschen Vollständigkeitssatz behandeln. Im Anschluss werden wir Nichtstandard-Modelle der natürlichen Zahlen betrachten und mit deren Hilfe den berühmten ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz beweisen. Dann werden wir uns der Mengenlehre widmen und unter anderem das Auswahlaxiom in seinen Varianten diskutieren. Außerdem ist ein Einblick in die Rekursionstheorie geplant.

Zeiten: Dienstags 16:45 - 18:15 Uhr und Donnerstags 9:45 - 10:30 Uhr.

Hier werden die Inhalte der einzelnen Vorlesungen kurz zusammengefasst. Dies dient nur zur groben Übersicht, keine Garantie auf Vollständigkeit!

Vorlesung 1 (Do 2.3.) Übersicht über die Vorlesung, Alphabet, aussagenlogische Formeln

Vorlesung 2 (Di 7.3.) Eindeutige Lesbarkeit, aussagenlogische Belegung, Erfüllbarkeit, Koinzidenzlemma, Allgemeingültigkeit, Kompaktheitssatz der Aussagenlogik (ohne Beweis), Prädikatenlogik: Sprachen

Vorlesung 3 (Do 9.3.) Strukturen, Isomorphie von Strukturen, $\mathcal{L}$-Terme, Eindeutige Lesbarkeit von Termen (Beweis Übungsaufgabe)

Vorlesung 4 (Di 14.3.) $\mathcal{L}$-Formeln, Eindeutige Lesbarkeit von Formeln (ohne Beweis), Belegungen, Erfüllbarkeit, freie Variablen, Koinzidenzlemma (siehe [Zie10])

Vorlesung 5 (Do 16.3.) Aussagen, Elementare Äquivalenz, Substitutionslemma (Beweis des ersten Teiles) (siehe [Zie10])

Vorlesung 6 (Di 21.3.) Substitutionslemma (Beweis des zweiten Teiles), Allgemeingültigkeit, 2. Koinzidenzlemma, Tautologien, Tautologien sind allgemeingültig, Axiome der Gleichheit (siehe [Zie10])

Vorlesung 7 (Do 23.3.) $\exists$-Quantorenaxiome, Modus Ponens, $\exists$-Einführung, Hilbertkalkül, Diskussion Vollständigkeitssatz (siehe [Zie10])

Vorlesung 8 (Di 28.3.) Beginn Beweis des Vollständigkeitssatzes: Ausreichend den Satz für Aussagen zu zeigen, Theorien, widerspruchsfreie Theorien, Modelle, Henkintheorien, vollständige Theorien, Plan des Beweises (siehe [Zie10])

Date: 20. Juni 2017.

Vorlesung 9 (Do 30.3.) Fortsetzung des Beweises des Vollständigkeitssatzes: Schritt 1 und Schritt 2

Vorlesung 10 (Di 4.4.) Ende des Beweises des Vollständigkeitssatzes: Schritt 3

Vorlesung 11 (Do 6.4.) Korollare: Kompaktheitssatz, Löwenheim-Skolem (siehe [Zie10]), Abzählbarkeit

Zwischentest in den Übungen (Do 6.4.)

Osterferien

Vorlesung 12 (Di 25.4.) Definition Q, PA, Nichtstandard-Modelle von PA (Anwendung des Kompaktheitssatzes) (siehe Satz 4.3.2 in [Sch09]) Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Vorlesung 13 (Do 27.4.) Beweis des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes mit Hilfe von Nichtstandard-Modellen

Vorlesung 14 (Di 2.5.) Fortsetzung des Beweises des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes

Vorlesung 15 (Do 4.5.) Ende des Beweises des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes

Vorlesung 16 (Di 9.5.) Diskussion von $\mathrm{ZFC}^{-\infty}$ (Formale Axiome und Beispiele)

Vorlesung 17 (Do 11.5.) Diskussion Unendlichkeitsaxiom, Definition Menge der von-Neumann-Zahlen ω, Definition Ordinalzahl

Vorlesung 18 (Di 16.5.) $(\omega, \{0,1\}, \{+, \cdot, exp\}, \{<\})$ ist ein Modell von PA, Klassen, BGC Axiome für Klassen, Beginn $(\mathbb{N}, E)$ ist ein Modell von $\mathrm{ZFC}^{-\infty}$ (siehe Satz 3.1.7 in [Sch09])

Vorlesung 19 (Do 18.5.) Ende $(\mathbb{N}, E)$ ist ein Modell von $\mathrm{ZFC}^{-\infty}$

Vorlesung 20 (Di 23.5.) Diskussion des Auswahlaxioms (siehe Abschnitt 3.2 in [Sch09]), einfache Anwendungen und Äquivalenzen (Lemmas 3.2.2 und 3.2.3 in [Sch09]), Fundierte Relationen, Wohlordnungen, Lemma 3.2.6 in [Sch09] (unendliche absteigende Folgen)

Christi Himmelfahrt (Do 25.5.)

Vorlesung 21 (Di 30.5.) Ordnungsisomorphismen, Der Wohlordnungssatz von Zermelo und seine Äquivalenz zum Auswahlaxiom

Vorlesung 22 (Do 1.6.) Ende des Beweises des Wohlordnungssatzes

Pfingsten (Di 6.6.)

Vorlesung 23 (Do 8.6.) Das Lemma von Zorn, das Haussdorffsche Maximalitätsprinzip und ihre Äquivalenz zum Auswahlaxiom (Satz 12)

Vorlesung 24 (Di 13.6.) Ende des Beweises von Satz 12, Rekursionssatz, die V_α Hierarchie, jede Wohlordnung ist zu genau einer Ordinalzahl isomorph

Fronleichnam (Do 15.6.)

Vorlesung 25 (Di 20.6.) Ende des Beweises, dass jede Wohlordnung zu genau einer Ordinalzahl isomorph ist, Mächtigkeit/Kardinalität einer Menge, Satz von Cantor, Kardinalzahlen, alle natürlichen Zahlen und ω sind Kardinalzahlen, $\aleph$ Notation, Kontinuumshypothese

Vorlesung 26 (Do 22.6.) Kardinalzahlarithmetik, Satz von Hesseberg

Vorlesung 27 (Di 27.6.) Wiederholung und Fragestunde

Vorlesung 28 (Do 29.6.) Klausur

Literatur

[EFT07] Ebbinghaus, H.-D. ; Flum, J. ; Thomas, W.: *Einführung in die mathematische Logik*. 5. Spektrum Akademischer Verlag, 2007 (Springer Spektrum)

[Sch09] Schindler, R.: *Logische Grundlagen der Mathematik*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2009 (Springer-Lehrbuch)

[Zie10] Ziegler, M.: *Mathematische Logik*. 1. Birkhäuser, 2010 (Mathematik Kompakt)