AUSGEWÄHLTE LÖSUNGEN

Lösung von Aufgabe 2(ÜB 5).

Zuerst zeigen wir Folgendes:

Behauptung 1. Die Formel $\exists x\psi(x)$ ist allgemeingültig.
Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Struktur. Entweder $\mathfrak{A} \models \varphi$ oder $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.
Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann $\mathfrak{A} \models \psi[a_0]$ wobei $a_0 = a^{\mathfrak{A}}$ (d.h. $\mathfrak{A} \models \exists x\psi(x)$ mit Zeuge a_0).
Wenn $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, dann $\mathfrak{A} \models \psi[b_0]$ wobei $b_0 = b^{\mathfrak{A}}$ (d.h. $\mathfrak{A} \models \exists x\psi(x)$ mit Zeuge b_0). $\square$

Da T eine Henkin Theorie ist, gibt es eine Konstante c, so dass die Formel

$$\exists x\psi(x) \to \psi(c)$$

ein Element von T ist.

Behauptung 2. $T \models \psi(c)$.
Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell von T. Dann gilt insbesondere $\mathfrak{A} \models \exists x\psi(x) \to \psi(c)$. Mit Hilfe von Behauptung 1 erhalten wir $\mathfrak{A} \models \psi(c)$. $\square$

Behauptung 3. $T \models \neg c \doteq a$ oder $T \models \neg c \doteq b$.
Beweis: Wegen Bedingung (b) gilt $T \models c \doteq a$ oder $T \models \neg c \doteq a$. Im zweiten Fall gilt die Behauptung. Angenommen $T \models c \doteq a$. Dann ergibt Bedingung (c) $T \models \neg c \doteq b$. $\square$

Nun sind wir vorbereitet den Beweis zu vollständigen.
Angenommen $T \models \neg c \doteq a$. Jetzt betrachten wir ein beliebiges Modell $\mathfrak{A}$ von T. Da $\mathfrak{A} \models \psi(c)$, erhalten wir $\mathfrak{A} \models \varphi$ und nach dem Vollständigkeitssatz $T \vdash \varphi$.
Sonst gilt $T \models \neg c \doteq b$ und ähnlicherweise erhält man, dass $T \vdash \neg\varphi$. $\square_{A2(Blatt5)}$

Date: May 5, 2017.

Lösungen von Aufgabe 4.2 und 4.3 (ÜB 6).

(2) Sei φ eine beliebige $\mathcal{L}$-Aussage. Dann

$$\Sigma \backslash X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma : \mathfrak{A} \not\models \varphi\} = \{\mathfrak{A} \in \Sigma : \mathfrak{A} \models \neg\varphi\} = X_{\neg\varphi}.$$

(3) Sei Φ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen mit der Eigenschaft, dass $\{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}$ eine Überdeckung von Σ ist. D.h.

$$\Sigma = \bigcup \{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}.$$

Jetzt betrachten wir die Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Wenn Ψ konsistent ist, dann existiert ein Modell $\mathfrak{A}_\Psi$ von Ψ. Daraus folgt aber, dass

$$\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma = \bigcup \{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}.$$

D.h. es gibt eine Aussage $\varphi_0 \in \Phi$ mit $\mathfrak{A}_\Psi \in X_{\varphi_0}$. Dann folgt aber $\mathfrak{A}_\Psi \models \varphi_0 \wedge \neg\varphi_0$ und wir haben einen Widerspruch erreicht. Nach dem Kompaktheitssatz gibt es eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ, so dass

$$\Psi_0 = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$$

nicht konsistent ist. Jetzt können wir zeigen, dass $\{X_\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$ eine endliche Teilüberdeckung von Σ ist. Wir betrachten ein beliebiges Element $\mathfrak{A}$ von Σ. Es muss ein $\varphi \in \Phi_0$ geben, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ (sonst wäre $\mathfrak{A}$ ein Modell von Ψ_0). Das heißt aber, dass $\mathfrak{A} \in X_\varphi$. Da $\mathfrak{A}$ beliebig war, erhalten wir $\Sigma = \bigcup \{X_\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$. $\square_{A4(Blatt6)}$

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währinger Strasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at