UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK: BONUS AUFGABEN 1, 24.03.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A, sei $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum B und sei $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Bemerken Sie, dass für jede Belegung β für $\mathfrak{A}$, $\pi \circ \beta$ eine Belegung für $\mathfrak{B}$ ist.

(1) Zeigen Sie über den Aufbau der Terme, dass für jeden $\mathcal{L}$-Term t und jede Belegung β für $\mathfrak{A}$,

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) = t^{\mathfrak{B}}[\pi \circ \beta].$$

(2) Zeigen Sie über den Aufbau der Formeln, dass für jede $\mathcal{L}$-Formel ϕ und jede Belegung β für $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \phi[\pi \circ \beta].$$

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A, sei $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum B und sei $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Benutzen Sie Aufgabe 1 um die folgenden Aussagen zu begründen:

(1) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind elementar äquivalent.

(2) Sei $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Zeigen Sie, dass für alle $a_1, \cdots, a_n$ in A,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n] \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \cdots, \pi(a_n)].$$

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A, $\phi = \phi(x_1, \cdots, x_n)$ eine $\mathcal{L}$-Formel und sei

$$X = \{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]\}$$

(d.h. X ist durch ϕ definierbar). Zeigen Sie, dass wenn π ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$ ist (d.h. wenn π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}$ ist), dann

$$\{(\pi(a_1), \cdots, \pi(a_n)) : \bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in X\} = X.$$

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at