

**UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): BONUS
AUFGABE 3, 23.05.2017**

Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

Satz: Sei Φ eine abzählbare Menge von aussagenlogischen Formeln. Die Menge Φ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

Definition:

- (1) Eine *Karte* ist ein Paar $\langle C, N \rangle$, wobei C eine Menge ist, deren Elemente als Länder interpretiert werden und N eine Menge von Paaren $\{c, c'\}$ ist, die als angrenzende Länder interpretiert werden. Wir sagen, dass $\langle C, N \rangle$ eine unendliche Karte ist, wenn die Menge C unendlich ist.
- (2) Eine *Teilkarte* von $\langle C, N \rangle$ ist eine Karte $\langle C', N' \rangle$, wobei $C' \subseteq C$ und $N' \subseteq N$.
- (3) Eine Karte kann mit vier Farben eingefärbt werden, wenn es eine Abbildung $F : C \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ gibt, so dass $F(c) \neq F(d)$ wenn $\{c, d\} \in N$. (Wir sagen, dass angrenzende Länder verschiedene Farben haben.)

Aufgabe 1 (Der Vier-Farben-Satz) Zeigen Sie, dass eine unendliche Karte $\langle C, N \rangle$ genau dann mit vier Farben eingefärbt werden kann, wenn jede endliche Teilkarte von $\langle C, N \rangle$ mit vier Farben eingefärbt werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie eine unendliche Menge von aussagenlogischen Variablen $\{A_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ mit der beabsichtigten Interpretation "das Land c_i hat die Farbe j ". Betrachten Sie die Menge Φ aller aussagenlogischen Formeln der folgenden Form:

- (1) $A_{i,j} \rightarrow \neg A_{i',j}$ und $A_{i',j} \rightarrow \neg A_{i,j}$, wobei $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $\{c_j, c_{j'}\} \in N$;
- (2) $A_{i,1} \vee A_{i,2} \vee A_{i,3} \vee A_{i,4}$ für $i \in \mathbb{N}$;
- (3) $A_{i,j} \rightarrow \neg A_{i,j'}$ für $j' \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass aus der Annahme, dass jede endliche Teilkarte von $\langle C, N \rangle$ mit vier Farben eingefärbt werden kann, folgt, dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Nun, betrachten Sie eine aussagenlogische Belegung β mit $\beta \models \Phi$. Zeigen Sie, dass β eine Abbildung $F : C \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ festlegt, welche die Behauptung bezeugt, dass $\langle C, N \rangle$ mit vier Farben eingefärbt werden kann.

KURT GÖDEL RESEARCH CENTER, UNIVERSITY OF VIENNA, WÄHRINGERSTRASSE 25, 1090 VIENNA, AUSTRIA
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at